Você poderia ter inventado a topologia

Luis A. Florit

https://luis.impa.br - luis@impa.br

Entre as primeiras ideias indutoras de vertigens que os alunos de matemática encontram estão os conceitos escorregadios de limite e função contínua. Todos aqueles ϵ's e δ's realmente obscurecem as ideias intuitivas e naturais por trás deles. Como costuma acontecer com noções complicadas, pode ser uma boa ideia tentar guiar a mente começando onde a intuição nos deixou.

Suponha que queremos determinar se uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *contínua* em $x_0 \in \mathbb{R}$, ou seja, se:

$$\textit{A medida que } x \textit{ se aproxima de } x_0, \textit{ o valor } f(x) \textit{ se aproxima a } f(x_0). \tag{1}$$

Dizemos que f *é contínua* se for contínua em todos os pontos x_0.

Temos dois problemas com esta definição *intuitiva*, e ambos referem-se a formalização. O mais óbvio é formalizar a ideia que "a se aproxima de b". Aqui há implicitamente algum tipo de distância envolvida: queremos dizer que a distância entre a e b se faz pequena enquanto a se move e b fica quieto. Mas, por outro lado, o que significa "se faz pequena"? O segundo problema, e menos óbvio, é o que estamos tentando determinar quando dizemos "a medida que".

Vamos chamar a distância entre a e b de $d(a, b)$, mesmo sem dizer explicitamente qual é essa distância (e até mesmo sem saber que tipos de objetos a e b são!). Então o que (1) diz é que

$$d(f(x), f(x_0)) \textit{ se faz pequena a medida que } d(x, x_0) \textit{ se faz pequena.} \tag{2}$$

Claro que qualquer que seja $d(a, b)$ deve ser um número real não negativo, afinal ele representa uma distância. Uma forma prática de formalizar que "$d(x, x_0)$ se faz pequena" é dizer que $d(x, x_0)$ é menor que um número positivo ϵ, ou seja, $0 \leq d(x, x_0) < \epsilon$, e então tomar ϵ arbitrariamente pequeno. Com isso em mente, em (2) estamos apenas dizendo que

$$d(f(x), f(x_0)) < \epsilon \quad \textit{desde que} \;\; d(x, x_0) \textit{ seja suficientemente pequena.} \tag{3}$$

Esta quantidade "suficientemente pequena" depende de todos os objetos envolvidos: do próprio ϵ, da função f e do ponto x_0. Em outras palavras, dado $\epsilon > 0$, deve haver um outro (provavelmente pequeno) número positivo $\delta = \delta(\epsilon, x_0, f)$ tal que

$$d(f(x), f(x_0)) < \epsilon \;\; \textit{se} \;\; d(x, x_0) < \delta. \tag{4}$$

Uma vez que esta propriedade deve ser satisfeita para cada $\epsilon > 0$ <ins>arbitrariamente</ins> pequeno, incorporamos isto em (4) assim dizendo que:

$$\textit{Para todo } \epsilon > 0, \textit{ existe } \delta > 0 \textit{ tal que } d(f(x), f(x_0)) < \epsilon \;\; \textit{se} \;\; d(x, x_0) < \delta. \tag{5}$$

Parabéns, nós acabamos de (re)inventar as noções formais de *limite* e de *função contínua*. Observe que o fato de δ depender de (ϵ, x_0, f), e do ϵ só precisar ser arbitrariamente pequeno, embora implicitamente, já estão logicamente embutidos em (5). Ao mesmo tempo que estes detalhes implícitos dificultam a compreensão do conceito nas primeiras leituras, o fazem mais fácil de verificar, mais limpo, e mais belo.

Agora, uma distância natural entre dois números reais a e b é dada pelo valor absoluto da sua diferença, ou seja $d(a, b) = |a - b|$. Podemos então substituir isto em (5). No entanto, o ponto importante aqui é que a forma explícita da distância é irrelevante para entender o conceito, contanto que realmente seja uma *distância*. Na verdade, até agora nem mesmo dizemos quem d era. Portanto, de (5) concluímos que:

Cada vez que temos uma noção de distância podemos falar de funções contínuas.

Mais importante ainda, as distâncias podem ser definidas sobre conjuntos arbitrários, não apenas sobre $\mathbb{R}$. Para fazer isto, basta você concordar com que qualquer função distância d deve satisfazer, pelo menos, as seguintes três propriedades geométricas naturais para ter o direito de ser chamada de distância:

$$d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b, \quad d(a, b) = d(b, a), \quad d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c), \;\forall a, b, c. \tag{6}$$

Observe que, tomando $c = a$ na terceira propriedade, chamada *desigualdade triangular*, obtemos $d \geq 0$, um fato que já usamos acima. Um conjunto X dotado de uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfazendo as três condições em (6) é chamado de *espaço métrico*, e é denotado por (X, d) ou simplesmente por X. Agora você pode facilmente estender a noção de continuidade para mapas sobre qualquer espaço métrico, $f : (X, d) \to (X, d)$, ou mesmo entre dois espaços métricos diferentes, $f : (X, d) \to (X', d')$.

Só por diversão, vamos agora escrever (5) numa linguagem mais próxima da teoria de conjuntos. Dado um ponto z em um espaço métrico (X, d) e $r > 0$, definimos a *bola métrica de raio r centrada em z* por

$$B_r(z) := \{x \in X : d(x, z) < r\}. \tag{7}$$

Então, simplesmente reescrevendo (5) usando (7) para uma função contínua $f : (X, d) \to (X, d)$ obtemos

$$\textit{para todo } \epsilon > 0, \textit{ existe } \delta > 0 \textit{ tal que } f(B_\delta(x_0)) \subset B_\epsilon(f(x_0)), \tag{8}$$

ou, equivalentemente,

$$\textit{para todo } \epsilon > 0, \textit{ existe } \delta > 0 \textit{ tal que } B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0))). \tag{9}$$

Agora, observe que qualquer bola métrica B tem a seguinte propriedade chave: para qualquer $x \in B$, existe um $\tilde{\epsilon} > 0$ (dependendo de x) de modo que $B_{\tilde{\epsilon}}(x) \subset B$. De fato, se $B = B_\epsilon(z)$ e pegamos $\tilde{\epsilon} := \epsilon - d(z, x)$, então $\tilde{\epsilon} > 0$ e pela desigualdade triangular em (6) temos que $B_{\tilde{\epsilon}}(x) \subset B_\epsilon(z)$. Um subconjunto B de X com esta propriedade é chamado de *aberto*. Podemos usar este conceito para reformular (9) dizendo que, para cada subconjunto aberto B contendo $f(x_0)$, deve existir um subconjunto aberto U contendo x_0 tal que $U \subset f^{-1}(B)$. Equivalentemente,

$$\textit{para cada aberto } B \subset X \textit{ contendo } f(x_0), \; f^{-1}(B) \textit{ é um aberto contendo } x_0. \tag{10}$$

Uma vez que isto deve valer para todo x_0 em X, podemos simplesmente esquecer de x_0 e dizer que

$$f^{-1}(B) \textit{ é aberto se } B \subset X \textit{ é aberto.} \tag{11}$$

Em princípio, aqui deveríamos ter algum cuidado pois f não precisa ser sobrejetiva e portanto $f^{-1}(B)$ poderia ser vazio. Mas obviamente da definição segue que o conjunto vazio $\emptyset$ é aberto, então não há problemas.

Está claro agora a partir de (11) que tudo o que precisamos para falar de funções contínuas é a coleção τ de todos os subconjuntos abertos de X. No caso de um espaço métrico, com as três propriedades da função de distância em (6), você pode verificar que:

i) Ambos X e $\emptyset$ estão em τ;

ii) Toda união arbitraria de elementos de τ está em τ;

iii) Toda interseção finita de elementos de τ está em τ.

Uma coleção τ de subconjuntos de um conjunto arbitrário Z que satisfaz estas três propriedades é chamada de uma *topologia* para Z, e o par (Z, τ) é chamado de *espaço topológico*. Pela observação anterior, todo espaço métrico tem uma topologia natural induzida pela sua distância, para a qual (11) finalmente se torna

$$\forall B \in \tau, \; f^{-1}(B) \in \tau. \tag{12}$$

Sem qualquer esforço você pode verificar que, com a topologia natural induzida num espaço métrico, as duas noções (5) e (12) são equivalentes. No entanto, para ter (12) nenhuma função distância é de fato necessária, apenas a topologia τ, ou seja, uma coleção de subconjuntos satisfazendo $(i)+(ii)+(iii)$. Esta é uma teoria muito mais geral e fecunda, já que os espaços topológicos são as estruturas mais básicas onde podemos falar sobre funções contínuas sendo fiéis a nossa primeira ideia intuitiva.

Compare agora (1) e (12), e pense profundamente sobre o salto.