Lista 11, Geometria Riemanniana

Diego N. Guajardo

8 de junho de 2021

Sempre M é uma variedade Riemanniana, pode-se sempre assumir conexa se for necessario e ∇ indica a conexão de Levi Civita. Alguns exercicios são do Lee, do Do Carmo e do Petersen e das listas do professor e de um trabalho de Wolfgang Meyer

NESTA LISTA RICCI SERÁ O TRAÇO E NAO O PROMÉDIO, para simplificar notacao

1. Considere as seguintes variedades: $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{T}^n, \mathbb{C}P^n$

   Decida se existem ou não métricas com curvatura $K > 0$, $K \leq 0$, $K \geq 0$, $K < 0$, Ric> 0, Ric ≥ 0.Faça uma tabela, e justifique.

2. Considere as seguintes variedades: $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m, \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m$

   Decida se existem ou não métricas com curvatura $K > 0$, $K \leq 0$, $K \geq 0$, $K < 0$, Ric> 0, Ric ≥ 0.Faça uma tabela, e justifique.

   Comentario: recomendo pular o caso de provar a existencia (ou nao a existencia) de métricas em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ e $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m$ com $K > 0$, é conjetura, mas se quiser tentar e consegue resolver vc tem um paper para publicar :D.

3. Seja M uma variedade com uma métrica g_0. Dizemos que uma família de métricas Rieamannianas $g(t)$ em M parametrizada pelo "tempo"satisfazem a equação do fluxo de Ricci se resolvem:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\mathrm{Ric}_t \tag{1}$$

$$g(0) = g_0 \tag{2}$$

   onde Ric_t é o tensor de Ricci da métrica $g(t)$. Vamos denotar $M_t = (M, g(t))$. Vamos analizar algumas soluções.

   (a) Mostrar que $g(t) = \sigma(t) g_0$, onde $0 < \sigma \in C^\infty(M)$ com $\sigma(0) = 1, \sigma'(0) = 2\lambda$, é uma solução da equação de Ricci se e somente se, g_0 é Einstein.

   (b) Seja M uma esfera e considere com a métrica g_0 a métrica de curvatura $\frac{1}{R^2}$. Resolver a equação do fluxo de Ricci, isto é, achar uma familia de métricas $g(t)$ e mostrar que esta familia esta definida num intervalo $(-\infty, a)$. Achar a e mostrar que M_t converge a um ponto na métrica de Hausdorff Gromov quando $t \to a$.

   (c) Seja M o espaço hiperbólico com g_0 a métrica de curvatura $-\frac{1}{R^2}$, Resolver a equação do fluxo de Ricci, isto é, achar uma familia de métricas $g(t)$ e mostrar que esta familia esta definida num intervalo (a, ∞). Achar a.

   Comentário: Estudar convergencias no caso (c) é mais complicado já que M_t nunca é compacta, e as distancias de Haussdorf normalmente são infinitas. Daí que tipicamente se usa outro tipo de convergencia, uma convergencia de Hausdorff Gromov pontual que é usando vizinhanca compactas e comparando pontos e não a variedade toda.

4. Outra familia importante de soluções da equação de Ricci é dada pelos "Ricci solitons". Elas são da forma $g(t) = \sigma(t)\phi_t^* g_0$, onde $0 < \sigma \in C^\infty(M)$ com $\sigma(0) = 1, \sigma'(0) = 2\lambda$ e $\phi_t : M \to M$ é uma familia suave de difeomorfismos com $\varphi_0 = \mathrm{Id}$ e $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 \phi_t = V$ (em particular as soluções do exercicio anterior).

   (a) Derivar $g(t)$ e mostrar que:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} \phi_t^* g_0 + \sigma(t) \frac{\partial}{\partial t} \phi_t^* g_0$$

   em particular para $t = 0$ temos:

$$-2\mathrm{Ric} = 2\lambda g_0 + \mathcal{L}_V(g_0)$$

   onde $\mathcal{L}_V$ é a derivada de Lie.

(b) Um caso mais particular ainda é quando ϕ_t é o fluxo de $\text{grad}(f)$, neste caso $\text{grad}(f) = V$. Mostrar que nestas hipoteses:

$$\lambda g_0 + \text{Hess}(f) + \text{Ric} = 0$$

Reciprocamente, dada f uma solução da equação anterior, da para achar o fluxo de Ricci usando o fluxo de $\text{grad}(f)$.

Comentário da parte (b): Esse tipo de soluções são chamadas "gradient Ricci solitons"e dependendo se $\lambda < 0, \lambda = 0$ ou $\lambda > 0$, a solução é dita contrativa, estática ou expansiva respetivamente.

Comentário: os Ricci solitons são generalizações das variedades Einstein, sao importantes na teoria de fluxo de Ricci para estudar limites.

$$\text{Ric} + \text{Hess}(f) = 0$$

5. (Exemplo de um "Ricci soliton") Seja $M = \mathbb{R}^2$ com a métrica $g_0 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}$ e $f = -\ln(1 + x^2 + y^2)$, mostrar que neste caso, $g(t) = \dfrac{dx^2 + dy^2}{e^{4t} + x^2 + y^2}$ é solução "gradient Ricci soliton"estática.

   Comentário: esse exemplo é importante na teoria de cordas e para um modelo de "buraco negro 2D"("Witten black hole")

6. Suponha que M é completa simplesmente conexa e X um campo Killing paralelo (isto é, $\nabla X = 0$). Mostrar que neste caso $M = N \times \mathbb{R}$

   Dica: Mostrar que X é o gradiente de uma função.

   Comentário: esse fato é usado no teorema Splitting, no final da prova se mostra que o gradiente da função de Busemann é um campo de Killing.

7. (Teorema de Bochner) Seja M compacta, orientada com $\text{Ric} \leq 0$ e X um campo de Killing, então X é paralelo. Conclua que se $l = \dim L$, onde L é o espaço dos campos Killing, então $\hat{M} = \mathbb{R}^l \times N$ isometricamente para algum N, onde $\hat{M}$ é o recobriemnto universal com a métrica de recobrimento.

   Dica: Defina $f = \dfrac{|X|^2}{2}$ e mostre que $\int_M \Delta(f) = 0$.

   Comentário: de algum modo esse é um teorema de splitting para curvatura não positiva.

   Comentario: Observe que pela prova, se $\text{Ric}_p < 0$ para algum $p \in M$, $l = 0$.

8. Dizemos que M é desconexo ao infinito se existe compacto $C \subseteq M$ tal que $M - C$ é desconexo e pelo menos duas componentes conexas são não limitadas. Mostrar que neste caso existe uma linha.

   Comentário: Para quem conheça o conceito de fins em topologia, isto é equivalente a dizer que existem pelo menos dois fins.

9. O objetivo desse exercicio vai ser provar o teorema de Cheeger-Gromov, isto é, se M é compacto com $\text{Ric} \geq 0$, então o recobrimento universal $\hat{M}$ com a métrica de recobrimento é isométrico a um produto $N \times \mathbb{R}^p$ com N compacto. Pelo teorema splitting é suficiente mostrar que N é compacta. Para isto, suponha por absurdo que N não é compacta, então existe um raio $\gamma(t)$ em N. Defina $c(t) = \pi(\gamma(t), 0)$ onde $\pi : \hat{M} \to M$ é o mapa de recobrimento. neste caso $\{c'(n)\}$ deve possuir uma sequencia convergente para um $v \in T_x M$. Levantando e usando argumentos de limite mostre que N possui uma linha. Conclua.

10. Seja M com $\text{Ric} \geq 0$ tal que existem compactos $C \subseteq M$ e $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tais que $M - C$ é isométrico com $\mathbb{R}^n - K$. Mostrar que $M = \mathbb{R}^n$ isometricamente.

    Dica: pegar n linhas ortogonais e refazer o exercicio 6 mas agora com n-linhas. Pode ser útil o exercicio 6 do capitulo 3 do do Carmo.