Lista 10, Geometria Riemanniana

Diego N. Guajardo

31 de maio de 2021

Sempre M é uma variedade Riemanniana, pode-se sempre assumir conexa se for necessario e ∇ indica a conexão de Levi Civita. Alguns exercicios são do Lee, do Do Carmo e do Petersen e das listas do professor e de um trabalho de Wolfgang Meyer

1. Suponha M completa com curvatura $K \leq k$, onde $k > 0$ é uma constante. Seja $p \in M$, mostrar que:
   (a) $\exp_p : B\Big(0, \dfrac{\pi}{\sqrt{k}}\Big) \subseteq T_pM \to M$ não tem pontos críticos.
   (b) Conclua que:
   $$\operatorname{inj}(p) \geq \min\Big\{\frac{\pi}{\sqrt{k}}, \frac{1}{2}(\text{comprimento do loop geodésico menor com base em } p)\Big\}$$
   (c) Conclua que o raio de injetividade satisfaz
   $$\operatorname{inj}(M) \geq \min\Big\{\frac{\pi}{\sqrt{k}}, \frac{1}{2}(\text{comprimento do loop geodésico menor em } M)\Big\}$$

2. (Paso importante do teorema de Toponogov) Seja p com curvatura $K \geq k$ e defina $r(x) = d(p, x)$ definida no dominio que seja suave e $\gamma(t)$ uma geodésica unitária radial saindo de p. Provar que:
   (a)
   $$\mathrm{Hess}_{\gamma(t)} r(X, Y) = \langle A_{\gamma(t)} X, Y\rangle$$
   Para X, Y tangentes à esfera de raio t centrada em p, zero em outro caso.
   (b) Pelo resultado do exercicio 9 da lista 7, $\mathrm{Hess}_{\gamma(t)} \leq \mathrm{ct}_k(t)\mathrm{Id}$, mas só nas direções perpendiculares a $\gamma(t)$, na prova de Toponogov aparece um truque para obter uma cota uniforme em todas as direções. Seja $f \in C^\infty(M)$ e $m \in C^\infty(\mathbb{R})$ uma função real, mostrar que:
   $$\mathrm{Hess}(m \circ f)(X) = m'(f)\mathrm{Hess} f(X) + m''(f)\langle \mathrm{grad}(f), X\rangle \mathrm{grad}(f)$$
   (c) Defina $\mathrm{md}_k(t) = \int_0^t \mathrm{sn}_k(r)dr \in C^\infty(\mathbb{R})$, mostrar que:
   $$\mathrm{Hess}(\mathrm{md}_k \circ r) \leq (\mathrm{cs}_k \circ r)\mathrm{Id}$$
   em todas as direções.

   Comentário: lembrar que $\mathrm{Hess} g(X) = \nabla_X \mathrm{grad}(g)$ para qualquer função $g \in C^\infty(M)$

3. Prove que:
   (a) Sejam $v, w \in T_pM$ e $\gamma_v(t) = \exp_p(tv), \gamma_w(t) = \exp_p(tw)$, $f(t) = d(\gamma_v(t), \gamma_w(t))^2$, usando um teorema de Taylor em $t = 0$ conclua que $f(t) = t^2\|v - w\|^2 + O(t^3)$ conclua que $d(\gamma_v(t), \gamma_w(t)) = t\|v - w\|$.

   Dica em (a): defina $\gamma(s, t) = \exp_{\gamma_v(t)}(s \exp^{-1}_{\gamma_v(t)}(\gamma_w(t))$, interprete geometricamente, relacione com f e note que suas derivadas são geodésicas ou campos de Jacobi.

   Comentário: em (a) dá para continuar o Taylor para provar que
   $$f(t) = t^2\|v - w\|^2 - \frac{t^4}{3}R(v, w, w, v) + O(t^5)$$
   o que já permitiria mostrar uma versão local do teorema de Toponogov (em bolas suficientemente pequenas).

4. (Teorema de Calabi Yau) Seja M completa não compacta com Ric ≥ 0 e $p \in M$, então existe uma constante $C = C_p > 0$ e $r_0 > 0$ tal que:
$$\mathrm{Vol}(B_r(p)) \geq Cr$$
para $r > r_0$. Com um exemplo, se convença que o comportamento linear nao pode ser melhorado.

Dica: pegue um raio $\gamma(t)$ tal que $\gamma(0) = p$, notar que:
$$B_{r_0}(p) \cup B_t(\gamma(t + r_0)) \subseteq B_{t+2r_0}(\gamma(t + r_0))$$
utilizar Bishop Gromov e que $B_{t+2r_0}(\gamma(t + r_0)) \subseteq B_{3t}(p)$ para t suficientemente grande.

5. (Métrica de Hausdorff) Dados um espaço métrico (X, d), e $A, B \subseteq X$ definimos a distancia de Haussdorff como:
$$d_H(A, B) = \inf\{R : B \subseteq B_R(A) \text{ e } A \subseteq B_R(B)\}$$
onde $B_R(A)$ é a união das bolas abertas de raio R com centros nos pontos de A, análogo para $B_R(B)$.

   (a) Mostrar que, salvo o fato de que d_H pode ser infinito, d_H definde uma métrica nos subespacos fechados de X.

   (b) Seja $r_i \to r > 0$ uma sequencia de numeros positivos, mostrar que se $X = \mathbb{R}^{n+1}$ com a métrica euclideana, temos que $\mathbb{S}^n(r_i) \to \mathbb{S}^n(r)$ na métrica de Hausdorff.

6. (Métrica de Hausdorff-Gromov) Sejam $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z_{dZ})$ espaços métricos, dizemos que $i : X \to Z$ é um mergulho isométrico se $d_Z(i(x_1), i(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$ para todos os pontos $x_1, x_2 \in X$. Definimos a métrica de Hausdorff-Gromov como:
$$d_{HG}(X, Y) = \inf\{d_H(i(X), j(Y)) : (Z, d_Z), i : X \to Z, j : Y \to Z \text{ mergulhos isométricos}\}$$
Definimos $(\mathcal{M}, d_{HG})$ como o espaço dos espaços métricos compactos.

Mostrar que $\mathbb{S}^n(r_i) \to \mathbb{S}^n(r)$ na métrica de Hausdorff-Gromov, em particular a curva $r \in \mathbb{R} \to \mathbb{S}^n(r) \in (M, d_{HG})$ é contínua.

Comentário: Dá para mostrar que $d_{HG}(X, Y) = 0$ se, e somente se, X e Y são isométricos. E salvo isometrias, o espaço $(\mathcal{M}, d_{HG})$ é completo e separável, para uma referencia veja o Peter Petersen. Também da para provar que se duas variedades riemannianas são isométricas como espaços métricos, então são isométricas como variedades riemannianas. O que mostra que esta distancia se comporta bem com as variedades riemannianas.

7. Seja G um grupo e $\Gamma \subseteq G$ um subconjunto finito de G. Dizemos que G é gerado por Γ se todo elemento de G pode ser escrito como produto de um numero finito de elementos de Γ ou seus inversos, neste caso definimos o função de crescimento de G respeito Γ como o cardinal do conjunto $N_G^\Gamma(k) = \#\Gamma^k$ onde:
$$\Gamma^k = \{g \in G | \exists m \leq k, g_{i_1}, \ldots, g_{i_m} \in \Gamma \text{ tal que } g = g_{i_1}^{\pm 1} \cdot \ldots \cdot g_{i_m}^{\pm 1}\}$$
Por exemplo, $G = \mathbb{Z}$, $\Gamma = \{1\}$, neste caso $N(k) = 2k + 1$. Suponha que G é gerado por Γ, dizemos que G tem crescimento polinomial (menor ou igual que n) se existem $c \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $N_G^\Gamma(k) \leq ck^n$.

   (a) Mostrar que $\mathbb{Z}^n$ tem crescimento polinomial para algum conjunto finito de geradores (Dica: usar um argumento por bolas, um grande centrada na origem conten no maximo cuantas bolas pequenas centradas nos elementos do grupo, isto pode dar uma ideia de como resolver a parte (b))

   (b) (Milnor) Seja M^n uma variedade completa com Ric ≥ 0 e $G \subseteq \pi_1(M)$ um subgrupo finitamente gerado. Então G tem crescimento polinomial menor ou igual do que n.

   (c) Se convença de que a superficie compacta orientada de genero 2 não possui uma métrica com Ric ≥ 0.

Dica para (b): Considere o recobrimento universal $\hat{M}$ e um ponto $\hat{p} \in \hat{M}$, defina como $l = \max\{d(\hat{p}, g\hat{p}) : g \in \Gamma\}$ e tente concluir como no teorema de Gromov.

Comentário 1: lembrar que $\mathbb{Z}^n$ é o grupo fundamental do toro, que admite uma métrica plana.

Comentário 2: o crescimento de um grupo finitamente gerado nao depende do conjunto de geradores, e de fato é um invariante do grupo.

Comentário 3: Pelo teorema de Gromov, se $K \geq 0$, $\pi_1(M)$ é finitamente gerado e por este exercicício, tem crescimento polinomial. Não se sabe se Ric ≥ 0 implica que $\pi_1(M)$ é finitamente gerado.