Lista 8, Geometria Riemanniana

Diego N. Guajardo

10 de maio de 2021

Sempre M é uma variedade Riemanniana, pode-se sempre assumir conexa se for necessario e ∇ indica a conexão de Levi Civita. Alguns exercicios são do Lee, do Do Carmo e do Petersen e de um trabalho de Wolfgang Meyer

1. Considere o hiperplano hiperbólico H^2, se chamamos de "reta"as geodésicas, dizemos que duas retas sao paralelas se nao se intersectam. Mostrar que a geometria hiperbólica satisfaz a seguinte propriedade: "Dada uma reta e um ponto fora da reta, existem infinitas geodésicas paralelas que passam por esse ponto"

   Comentário: Essa propriedade é a "única"diferenca com a geometria euclidiana.

2. Achar todas as variedades orientáveis completas de curvatura zero.

3. Sejam A, B subvariedades de M e $\Omega_{A,B}(M) = \{\gamma : [0,1] \to M : \gamma(0) \in A, \gamma(1) \in B\}$ (γC^1 por partes), mostrar que os pontos criticos do funcional de energia:
$$E : \Omega_{A,B}(M) \to \mathbb{R}$$
   são geodésicas ortogonais a A e B. Suponha agora que M é completa e que A é compacta e B fechada. Mostrar que existe um ponto crítico.

4. Exercicio 1 do capitulo 8 do Do Carmo

5. Exercicio 6 do capitulo 8 do Do Carmo

6. Seja $f : M^n \to \overline{M}^m$ imersão isométrica com segunda forma fundamental paralela. Mostrar que o vetor de curvatura média é paralelo. Suponha agora que $\overline{M}^m$ te curvatura constante c. Mostrar que $\nabla R = 0$ e que $\nabla^{\perp} R^{\perp} = 0$

7. Exercicio 14 do capitulo 8 do Do Carmo. Conclua que toda forma espacial é localmente simétrica.

8. Suponha que (M, g) tem curvatura $K \leq 0$ e $p \in M$ fixo

   (a) Vamos mostrar que a segunda forma fundamental das esferas geodésicas centradas em p satisfaz $A \geq \frac{1}{t} I$, onde t é o raio da esfera. Para isso, seja J um campo de Jacobi ortogonal a uma geodésica unitária com $J(0) = 0$, defina
$$\lambda(t) = \frac{\langle A_{\gamma(t)} J(t), J(t) \rangle}{\|J(t)\|^2}$$
   verificar que $\lambda' + \lambda^2 \geq 0$. Conclua.

   (b) Mostre que $\text{Hess}\dfrac{r^2}{2} \geq g$, onde $r(x) = d(p, x)$

   (c) Seja um triângulo geodésico em M (as arestas são geodésicas) com lados de comprimento a, b, c com angulos opostos α, β, γ, mostrar que:
$$a^2 \geq b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$
$$\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$$
   Dica para parte (c): chame p um vértice do triângulo, $\gamma(t)$ a geodésica unitária da aresta oposta a p e defina $f(t) = r^2(\gamma(t))$, notar que $f'' \geq 2$.