Lista 6, Geometria Riemanniana

Diego N. Guajardo

20 de abril de 2021

Sempre M é uma variedade Riemanniana, pode sempre assumir conexa se for necessario e ∇ indica a conexão de Levi Civita. Alguns exercicios sao do Lee, do Do Carmo e do Petersen.

1. Seja $\mathbb{H}^n(R) = \{(x_0, \ldots, x_n); x_0 > 0, -x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = -R^2\} \subseteq \mathbb{R}^{n,1}$ do espaço de Minkowsky (é a "esfera"neste espaço). Mostrar que:
   (a) $\mathbb{H}^n(R)$ é um variedade Riemanniana com a métrica induzida
   (b) Mostrar que este espaço tem curvatura igual a $-\frac{1}{R^2}$
2. Seja $M^n \subseteq M_c^{n+1}$ uma hipersuperfície, onde M_c^{n+1} é um espaco de curvatura constante c. Mostrar que:
$$\mathfrak{R}(X \wedge Y) = c(X \wedge Y) + AX \wedge AY$$
onde A é a segunda forma associada a um dos vetores uniários normais. Calcular tambèm os autovalores. Utilizando o seguinte fato "o operador de curvatura $\mathbb{C}P^2$ tem como autovalor o zero", mostrar que $\mathbb{C}P^2$ nao pode ser mergulhado isometricamente em nenhum espaço M_c^5 para nenhum c.
3. Seja $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície, definimos a curvatura Gaussiana como o determinante da segunda forma fundamental. Provar que é essa curvatura é instrinseca salvo sinal.
   Dica: usar o exercício anterior.
4. Considere a carta do exercicio 2 da lista 4, mostrar que:
$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3}\sum_{k,l} R_{iklj}x^k x^l + O(\|x\|^3)$$
Dica: Fixado $x = (x_1, \ldots, x_n)$, considere $\gamma(t) = (tx_1, \ldots, tx_n)$ e a variação por geodésicas $(tx_1, \ldots, t(x_i+s), \ldots, tx_n)$, com vetor associado J_i. Mostrar que $t^2 g_{ij}(t) = \langle J_i, J_j\rangle$ e derivar.
   Comentário: Fazendo com mais cuidado da para reparar que podemos obter toda a expanssão de Taylor, em termos do tensor de curvatura e suas derivadas. Isso ja permite conjecturar que se duas variedades possuim os mesmos tensores de curvatura deveriam ser isométricas, esse exercicio prova isto no caso analìtico pelo menos.
5. Utilizando a fórmula anterior, mostrar que:
$$\mathrm{Vol}(B_p(r)) = \mathrm{Vol}(B^{\mathbb{R}^n}(r))\left(1 - \frac{S(p)n(n-1)r^2}{6(n+2)} + O(r^3)\right)$$
onde $S(p)$ é a curvatura escalar.
6. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$, $\varphi : I \to \mathbb{R}_{>0}$ e $M = I \times \mathbb{S}^{n-1}$ com a métrica $g = dr^2 + \varphi^2 h$ onde h é a métrica da esfera unitária. Calcular que EDO φ deve satisfazer para possuir curvatura escalar nula.
   Dica: Defina $S_r = r \times \mathbb{S}^{n-1} \subseteq M$, que é uma esfera de curvatura constante. Usar as equações fundamentais para calcular o tensor de curvatura de M.
   Comentário 1: Esse exercício é interesante porque permite ir no outro sentido usual, conhecendo subvariedades podemos calcular o tensor de curvatura da variedade total.
   Comentário 2: trabalhando um pouco a EDO, dá para mostrar que exite uma família φ_α de soluções em $\mathbb{R}$ tais que as métricas associadas não são isométricas.
7. (Vetores Killing) Veirificar que:

(a) O espaço dos vetores Killing K, é uma álgebra de Lie (com o colchete dos campos vetoriais)

(b) Seja X um vetor Killing, e $\gamma(t)$ uma geodésica. Mostrar que $X(\gamma(t))$ é um campo de Jacobi

(c) Mostrar que $X \to (X_p, (\nabla X)_p)$ é injetiva. Conclua que $\dim(K) \leq \frac{n(n+1)}{2}$

Comentário: Essa algebra de Lie é de fato a álgebra de Lie do grupo de isometrias (pelo menos no caso compacto)

8. (O objetivo desse exercício é provar uma recíproca para as equações fundamentais no caso de hipersuperficies.) Seja M uma varieade Riemanniana simplesmente conexa que possui um tensor simétrico $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que:

(Gauss) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle AX, AW\rangle\langle AY, AZ\rangle - \langle AX, AZ\rangle\langle AY, AW\rangle$

(Codazzi) $\nabla_X A(Y) = \nabla_Y A(X)$

Considere o fibrado $E = TM \oplus R$ (soma de Whitney), considere $\xi = (0,1) \in E$ defina em E a conexão:

$$\nabla^E_X Y = \nabla_X Y + \langle AX, Y\rangle\xi$$

$$\nabla^E_X \xi = -AX$$

Verificar:

(a) $R^E = 0$ (a curvatura de E é zero)

(b) Assumindo que curvatura zero implica que o transporte paralelo não depende da curva, mostrar que existe uma isometria plana de fibrados $\phi : E \to M \times \mathbb{R}^{n+1}$ (fibrado trivial com a conexao trivial)

(c) Defina a 1-forma a valores em $\mathbb{R}^{n+1}$, por $\omega = \pi_2 \circ \phi|_{TM}$ (onde π_2 é a projeção no segundo fator). Mostre que $d\omega = 0$

(d) Conclua que existe ima imersão isométrica $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$

Comentário 1: Com um pouco mais de trabalho dá para mostrar que o tensor A è de fato o operador de forma associado à segunda forma da imersão f.

Comentário 2: Dá para generalizar esse exercício para qualquer codimensão, mas aí tem que trabalhar com um candidato a segunda forma (e não só com o operador de forma) e ele deve satisfazer Ricci também.

Comentário 3: O fato de ser simplesmente conexo é uma hipótese que toda variedade satisfaz localmente, nesse sentido é uma hipotese que não é realmente necessária.

Comentário 4: Existe um teorema que garante que toda variedade Riemanniana pode ser mergulhada isometricamente em R^N. Pelo exercicio, é suficiente achar um candidato a tensor de segunda forma que satisfaça Gauss, Codazzi e Ricci (muito dificil de achar).

9. Seja $f : M^n \to \mathbb{Q}^m_c$ uma imersão mínima com M simplesmente conexo, tal que $\nu = n - 2$, onde $\nu = \dim \Delta$ e $\Delta = \{X : \alpha(X, \cdot) = 0\}$ chamado de nulidade relativa. Seja $R_\theta : TM \to TM$ o tensor que é a identidade em Δ e em $\Delta^\perp$ é uma rotação em θ graus. Defina $\alpha_\theta(X,Y) := \alpha(R_\theta(X), Y)$, mostrar:

(a) α_θ está bem definido e é simétrico.

(b) α_θ satisfaz Gauss, Codazzi e Ricci. Conclua que existe uma imersão $f_\theta : M^n \to \mathbb{Q}^m_c$ tal que $\alpha^{f_\theta} = \alpha_\theta$

(c) Mostrar que f_θ é mínima.

Comentário: esse exercício é válido em particular para toda superfície mínima não plana de $\mathbb{R}^3$, e tem de fato um exemplo clássico que é dado pela rotação do catenoide no helicoide (tem um Gif maneiro na página em ingles do catenoide na wikipedia).