Lista 5, Geometria Riemanniana

Diego N. Guajardo

10 de abril de 2021

Sempre M é uma variedade Riemanniana. Alguns exercicios sao do Lee, do Do Carmo e do Petersen.
Os tensores de curvatura nao tem uma convencao única na literatura. Nesta lista (e nas próximas) vamos usar:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \frac{1}{n-1} \mathrm{tr}(v \to R(v,X)Y)$$

$$S = \frac{1}{n} \mathrm{tr}(\mathrm{Ric})$$

1. (Espaços de curvatura constante)
   - Provar que $\mathbb{R}^n$ tem curvatura constante 0
   - Provar que $\mathbb{S}^n$ tem curvatura constante 1
   - Provar que G do exercício 4 do capítulo 1 do do Carmo, tem curvatura constante -1

2. (Interpretaçoes do tensor de Ricci e da curvatura escalar)

   (a) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ operador linear simétrico, mostrar que:

   $$\frac{\mathrm{tr}(A)}{n} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle Ax, x \rangle$$

   isto permite interpretar o traço como um promédio.

   (b) Seja $v \in T_pM$ vetor unitário de uma variedade Riemanniana, seja também $\mathbb{S}_v = \{w \in T_pM; \|w\| = 1, \langle w, v \rangle = 0\}$ e π_w o plano gerado por v, w provar que:

   $$\mathrm{Ric}(v,v) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}_v)} \int_{\mathbb{S}_v} K(\pi_w) dw$$

   (c) Mostrar que se $\mathbb{S}_p$ é a esfera unitária em T_pM:

   $$S(p) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}_p)} \int_{\mathbb{S}_p} \mathrm{Ric}(v,v) dv$$

   Connentário: Como o tensor de Ricci é simétrico, basta defini-lo nos vetores da parte b). Este item mostra que intuitivamente $\mathrm{Ric}(v,v)$ é a curvatura promédio na direção v. A parte c) mostra que, intuitivamente, a curvatura escalar mede duas vezes a curvatura promédio em p (note que na integral aparece v e $-v$, deveriamos integrar sobre $\mathbb{R}P^{n-1}$ e não sobre a esfera)

3. Seja G um grupo de Lie com umá métrica invariante, mostrar que para campos invariantes pela esquerda:

   $$R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[Z,[X,Y]]$$

   conclua que se π é um plano gerado por dois campos ortonormais invariantes pela esquerda X, Y (todo plano é dessa forma) temos que:

   $$K(\pi) = \frac{1}{4}\|[X,Y]\|^2$$

   Mostrar que $\mathrm{Ric}(X,X) = 0$ se, e somente se, X comuta com todo elemento da algebra.

   Comentátio: Isto mostra que todo grupo de Lie com métrica bi-invariante possui curvatura não negativa, e que além disso, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\mathrm{Ric} \geq \varepsilon g$ se o centro de G é discreto.

4. Seja $\lambda > 0$, considere a métrica $h = \lambda g$. Relacionar os tensores de curvatura, Ricci e escalar. Relacionar as curvaturas seccionais.

5. (Operador de curvatura)

   (a) Provar que pelas simetrias do tensor de curvatura existe um operador $\mathfrak{R} : \Lambda^2 TM \to \Lambda^2 TM$, chamado operador de curvatura, tal que:

   $$\langle \mathfrak{R}(x \wedge y), z \wedge w \rangle = \langle R(x,y)w, z \rangle$$

   (notar que z e w ficam invertidos)

   (b) Mostrar que M tem curvatura constante k se, e somente se, $\mathfrak{R}(w) = kw$, $\forall w \in \Lambda^2 TM$

   (c) Suponha o caso de que existe uma base ortonormal $\{e_i\}$ de T_pM tal que $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}(e_i \wedge e_j) = \lambda_{ij} e_i \wedge e_j$ (para $i < j$). Mostrar que neste caso, $K(\pi) \in [\min \lambda_{ij}, \max \lambda_{ij}]$ para todo π plano de T_pM. (essa base nem sempre existe, um contra exemplo é $\mathbb{C}P^2$)

   (d) Seja $\lambda_p = \max\{K(\pi); \pi \subseteq T_pM \text{ plano}\}$. Provar que existe uma constante $c(n)$, que só depende da dimensão de M^n tal que:

   $$|\mathfrak{R}_p| \leq c(n)\lambda_p$$

6. (Esferas Berger) Por simplificacao suponha $\lambda_1 = \varepsilon < 1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Calcular o operador de curvatura e conclua que a curvatura da esfera toma valores em $[\varepsilon^2, 4 - 3\varepsilon^2]$

7. (Fórmula de O'Neill) Suponha que $\pi : \overline{M} \to M$ é uma submersão Riemanniana. Provar que:

   $$R(W,X,Y,Z) \circ \pi = \overline{R}(\overline{W}, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}) - \frac{1}{2}\left\langle [\overline{W}, \overline{X}]^v, [\overline{Y}, \overline{Z}]^v \right\rangle - \frac{1}{4}\left\langle [\overline{W}, \overline{Y}]^v, [\overline{X}, \overline{Z}]^v \right\rangle + \frac{1}{4}\left\langle [\overline{W}, \overline{Z}]^v, [\overline{X}, \overline{Y}]^v \right\rangle$$

   Conclua que se W, X são ortonormais:

   $$K(\operatorname{span}\{X, W\}) = K(\operatorname{span}\{\overline{X}, \overline{W}\}) + \frac{3}{4}\|[\overline{W}, \overline{X}]^v\|^2$$

8. Mostrar que e $\mathbb{C}P^n$, a curvatura secional toma valores desde 1 até 4. Mostrar que é uma variedade de Einstein, isto é, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

   $$\text{Ric} = \lambda g$$

   Comentário 1: Isto mostra que se bem $\mathbb{C}P^n$ não tem curvatura constante mas "quase"; em qualquer direção, a curvatura promédio nessa direção é λ.

   Comentário 2: Veja o enunciado do teorema 1 do capítulo 13 do do Carmo. Este exercício mostra que $h = \frac{1}{4}$ é cota ótima (pelo menos em dimensão par e maior que 2).

9. (k-homogéneo)

   (a) Suponha que M é homogeneo, mostrar que M tem curvatura escalar constante

   (b) Suponha que M é 2-homogeneo. Mostrar que M é Einstein

   (c) Suponha M é 3-homogeneo. Mostrar que M tem curvatura constante.

10. (Identidade de Bianchi)

    (a) Provar a segunda identididade de Bianchi (exercício 7 do capitulo 4 do do Carmo)

    (b) Provar a identidade de Biachi contraída:

    $$2\text{divRic} = ndS$$

    Conclua que o tensor de Einstein $G = \text{Ric} - \frac{n}{2}Sg$ tem divergência zero

    Comentário: O tensor de Einstein é importante na teoria da relatividade, e o fato de ter divergência zero é interpretado como uma conservação da energia e do momentum.

11. Exercício 8 do capítulo 4 do do Carmo

12. Exercício 10 do capítulo 4 do do Carmo (notar que a dica é a identidade de Bianchi contraída)