Lista 4, Geometria Riemanniana

Diego N. Guajardo

2 de abril de 2021

Sempre M é uma variedade Riemanniana. Alguns exercicios sao do Lee, do Do Carmo e do Petersen.

1. Seja $F : (M^n, g) \to (N^n, h)$ uma isometria local, provar que:
   (a) Se $\gamma(t)$ é uma geodésica com condições iniciais p e v, então $F(\gamma(t))$ é uma geodésica com condições iniciais $F(p)$ e $dF_p(v)$.
   (b) Temos o seguinte diagrama comutativo (ε suficientemente pequeno):

$$\begin{array}{ccc} B_\varepsilon(0) \subseteq T_pM & \xrightarrow{(dF)_p} & B_\varepsilon(0) \subseteq T_{F(p)}N \\ \downarrow{\scriptstyle \exp_p} & & \downarrow{\scriptstyle \exp_{F(p)}} \\ B_\varepsilon(p) \subseteq M & \xrightarrow{F} & B_\varepsilon(F(p)) \subseteq N \end{array}$$

   Isto é $\exp_{F(p)} \circ dF_p = F \circ \exp_p$
   (c) Sejam $F, G \in \mathrm{Iso}(M)$ e suponha que existe um ponto $p \in M$ tal que $F(p) = G(p)$ e $dF_p = dG_p$. Mostre que $F = G$

   Comentario: a propriedade (b) diz que o mapa exponencial é uma transoformação natural na teoria de categorias.

2. Seja $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq T_pM$ uma base ortonormal. Considere a carta $\varphi : B_\varepsilon(0) \subseteq \mathbb{R}^n \to M$ dada por:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \exp_p(x_1v_1 + \ldots + x_nv_n)$$

   (carta exponencial) Mostrar que nesta carta:
   (a) $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$
   (b) $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$
   (c) $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(0) = 0$

   Comentário: em particular temos a expansão de Taylor. Esta carta é muito útil para fazer contas. $g_{ij}(x) = \delta_{ij} + o(|x|)$

3. Exércicio 7 do capítulo 3 do do Carmo. Esse é outra base útil para fazer contas

4. Suponha que M possui duas métricas Riemannianas g, h e suponha que $d_g(x, y) = d_h(x, y)$ para todo $x, y \in M$. Mostrar que $g = h$.

5. Seja $f \in C^\infty(M)$ tal que $\mathrm{grad}(f)$ é unitário. Mostrar que as curvas integrais do gradiente são geodésicas.

6. Exercício 1 do capítulo 3 do do Carmo

7. Suponha que M é conexa e que para cada $p \in M$ existe $F = F^p \in \mathrm{Iso}(M)$ tal que $F(p) = p$ e $dF_p = -\mathrm{Id}_p$. Mostrar que para cada $p, q \in M$ existe uma isometria $T = T^{p,q}$ tal que $T(p) = q$.

8. Dizemos que M é isotrópico se para cada $p \in M$ e $v, w \in T_pM$ unitários, existe um isometria $F = F^{p,v,w}$ tal que $F(p) = p$ e $dF_p(v) = w$. Dizemos que M é k-homogéneo se para duas k-tuplas de pontos de M, $p = (p_1, \ldots, p_k)$ $q = (q_1, \ldots, q_k)$ tais que $d(p_i, p_j) = d(q_i, q_j)$ para todo i, j, existe uma isometria $T = T^{p,q}$ tal que $T(p_i) = q_i$ para todo i. Mostrar que 2-homogéneo implica isotrópico.

9. exercicio 5 do capitulo 3 do do Carmo

10. exercicio 6 do capitulo 3 do do Carmo