Lista 2, Geometria Riemanniana

Diego N. Guajardo

20 de março de 2021

Sempre M é uma variedade Riemanniana. Alguns exercicios sao do Lee, do Do Carmo e do Petersen.

1. Dada uma função $u \in C^\infty(M)$, definimos o *gradiente* como o único campo $\text{grad}(u) \in \mathfrak{X}(M)$ tal que para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos:
$$du(X) = \langle \text{grad}(u), X \rangle$$
Dado um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, podemos definir a *divergencia* de X como a função $\text{div}(X) \in C^\infty(M)$ tal que:
$$\text{div}(X)\text{Vol} = d(\iota_X \text{Vol})$$
onde Vol é uma n-forma de volume (local, se M for orientável pode ser tomada global). Expressar em cartas $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$: $\quad \text{grad}(u), \quad \text{div}(X), \quad \Delta u = \text{div}(\text{grad}(u))$
Obs: ι_X é a chamada a derivada interior, $\iota_X : \Omega^k(M) \to \Omega$

2. Dada uma variedade riemanniana com bordo, seja N o campo unitario normal ao bordo e que aponta para fora. Provar o teorema da divergencia e da integração por partes ($\text{Vol}_M, \text{Vol}_{\partial M}$ são as formas de volume de M e ∂M resp.):
$$\int_M \text{div}(X)\text{Vol}_M = \int_{\partial M} \langle N, X \rangle \text{Vol}_{\partial M}$$
$$\int_M \langle \text{grad}(u), X \rangle \text{Vol}_M = \int_{\partial M} u \langle N, X \rangle \text{Vol}_{\partial M} - \int_M u\text{div}(X)\text{Vol}_M$$

3. Exercicio 4 do capitulo 1 do Do Carmo

4. Exercicio 7 do capitulo 1 do Do Carmo

5. Contas:
   (a) Seja $\mathbb{S}^3(1) \subseteq \mathbb{C}^2$, $\mathbb{S}^2(1/2) \subseteq \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$ e $F : \mathbb{S}^3(1) \to \mathbb{S}^2(1/2)$ dada por $F(z, w) = (1/2(|w|^2 - |z|^2), z\overline{w})$, é uma submersão Riemanniana (1 e 1/2 sao os respectivos raios)
   (b) Provar que existe uma métrica no toro $T = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ tal que $\pi : \mathbb{R}^n \to T$ é uma isometria local. Provar que com essa métrica existe uma imersão isometrica $T \to \mathbb{R}^{2n}$
   (c) Provar que existe uma métrica no espaco projetivo $\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n/\{I, -I\}$ tal que $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$ é uma isometria local. Provar que com essa métrica, $\varphi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)+n+1}$ dada por:
$$\varphi(x_0, \ldots, x_n) = (\frac{1}{\sqrt{2}}x_0^2, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2}}x_n^2, x_0x_1, x_0x_2, \ldots, x_{n-1}x_n)$$
   induz uma imersão isometrica do espaco projetivo.

6. Provar que $\text{div}(X) = 0$ se e somente se, o fluxo de X localmente preserva a forma de volume (isto é, se em U o fluxo esta definido pelo menos ate ε entao $\text{Vol}_U = \phi_t^* \text{Vol}_{\phi_t(U)}$ para todo $0 < t < \varepsilon$)

7. Dado um fibrado vetorial $E \xrightarrow{\pi} M$, provar que possui uma conexão.

8. Fixada uma conexão ∇^0 num fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ e um mapa $T : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ que é $C^\infty(M)$-bilinear (isto é, tensorial em TM, E a valores em E), entao:
$$\nabla_X s := \nabla^0_X s + T(X, s)$$
define outra conexão. Conclua que toda conexão é desta forma.
Comentário: este execício junto com o anterior mostra que as conexões estao em bijeação com o conjunto dos tensores T, ie, seções do fibrado $T^*M \otimes E^* \otimes E \to M$.

9. Dada uma conexão ∇ em $TM \xrightarrow{\pi} M$, definimos a *torsão* de ∇ como o mapa $\tau = \tau^{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ como:

$$\tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

   (a) Provar que τ é um tensor, isto é, $C^{\infty}(M)$-bilinear.

   (b) Uma conexão é dita *livre de torsão* se $\tau^{\nabla} = 0$. Assuma que existe uma conexão livre de torsão (vamos ver no curso que sempre existe). Mostre que o conjunto das conexões livres de torsão estão em bijeção com o conjuto das 2-formas $\Omega^2(M)$.

10. $(E \xrightarrow{\pi} M, \nabla^E)$ e $(F \xrightarrow{\pi} M, \nabla^F)$, fibrados vetoriais com conexões e $X \in \mathfrak{X}(M), e \in \Gamma(E)$ e $f \in \Gamma(F)$, seções arbitrárias, provar que:

   (a) $E^* \xrightarrow{\pi} M$ possui uma única conexão ∇^{E^*} tal que $\forall \omega \in \Gamma(E^*)$:

$$X(\omega(e)) = (\nabla_X^{E^*} \omega)(e) + \omega(\nabla_X^E e)$$

   (b) $E \oplus F \xrightarrow{\pi} M$ possui uma única conexão $\nabla = \nabla^{E \oplus F}$ tal que:

$$\nabla_X(e + f) = \nabla_X^E e + \nabla_X^F f$$

   (c) $E \otimes F \xrightarrow{\pi} M$ possui uma única conexão $\nabla = \nabla^{E \otimes F}$ tal que:

$$\nabla_X(e \otimes f) = (\nabla_X^E e) \otimes f + e \otimes (\nabla_X^F f)$$

   Comentário: é muito comúm chamar todas as conexões de ∇ sem indicar a que fibrado corresponde, mas para decorar é recomendável sempre pensar que satisfaz uma "regra de Leibniz"(vejam que o exercicio anterior mostra que as conexoes trabalham como derivadas). Como comentario geral, dada uma conexão ∇ em TM (pode ser num fibrado geral, mas para simplificar vamos trablhar no TM) e T um (k,l)-tensor isto é, uma seção em $T \in \Gamma(TM^k \otimes T^*M^l)$ entao podemos interpretar a seção como um tensor:

$$T : \Omega(M) \times \cdots \times \Omega(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M) \to C^{\infty}(M)$$

   e em geral:

$$\begin{aligned}(\nabla_X T)(\omega_1, \cdots, \omega_k, X_1, \ldots, X_l) =& \nabla_X(T(\omega_1, \cdots, \omega_k, X_1, \ldots, X_l)) - T(\nabla_X \omega_1, \cdots, \omega_k, X_1, \ldots, X_l) - \ldots \\ & - T(\omega_1, \cdots, \nabla_X \omega_k, X_1, \ldots, X_l) - T(\omega_1, \cdots, \omega_k, \nabla_X X_1, \ldots, X_l) - \ldots \\ & - T(\omega_1, \cdots, \omega_k, X_1, \ldots, \nabla_X X_l)\end{aligned}$$

   é a formula geral da conexão para um tensor geral válida para todo tipo de tensores (antisimétricos, simétricos, covariantes, contravariantes, etc). VEJAM QUE É A REGRA DE LEIBNIZ.

11. Suponha que ∇ é uma conexão de $E \to M$, mostre que:

   (a) Se g é uma métrica do fibrado, então:

$$\nabla_X g = 0 \Leftrightarrow X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad \forall Y, Z \in \Gamma(E), X \in TM,$$

   neste caso a métrica é dita compatível com a conexão

   (b) Suponha que $A, B : E \to E$ são automorfismos de fibrados (isto é, mapas que enviam cada fibra linearmente nela mesma). Mostrar que:

$$\nabla_X(A \circ B) = (\nabla_X A) \circ B + A \circ (\nabla_X B)$$

   Dica: LEIBNIZ