Lista 9, Geometria Riemanniana

Diego N. Guajardo

17 de agosto de 2020

Sempre M é uma variedade Riemanniana, pode-se sempre assumir conexa se for necessario e ∇ indica a conexão de Levi Civita. Alguns exercicios são do Lee, do Do Carmo e do Petersen e das listas do professor

1. Suponha que M é completa, conexa e com curvatura positiva, se $M_1, M_2 \subseteq M$ compactas, totalmente geodésicas e tais que $\dim M_1 + \dim M_2 \geq \dim M$, mostrar que $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$

   Comentário: Este exercício generaliza o fato que os circulos geodésicos de uma esfera sempre se intersectam.

2. Seja M uma variedade completa e $A \subseteq M$ subvariedade compacta, mostrar que:

   (a) Curvas que não são estacionarias (para o funcional energia $E : \Omega_{A,A}(M) \to \mathbb{R}$) podem ser deformadas a curvas de comprimento menor.

   (b) Se M tem curvatura positiva, A totalmente geodésica e $2 \dim A \geq \dim M$, então as curvas estacionarias podem ser deformadas em curvas de comprimento menor.

   Comentário: Usando esse exercicio e tecnicas de análise, da para mostrar que de fato qualquer curva com extremos em A pode ser deformada a uma curva em A (em linguagem de topologia, $\pi_1(M, A) = 0$). Este resultado pode ser generalizado para trabalhar $\pi_k(M, N)$ (Connectedness Principle, Wilking).

3. Seja M completa com curvatura de Ricci positiva e N, P hipersuperficies mínimas, com N compacta e P fechada, mostrar que $N \cap P \neq \emptyset$

4. Seja M completa e $C \subseteq M$ um compacto. Suponha que $\mathrm{Ric} \geq \varepsilon > 0$ fora de C. Provar que M é compacta e achar uma cota superior para o diametro de M.

5. Neste exercício vamos ver como a técnica de variações pode ser aplicada para o estudo de subvariedades mínimas. Seja $f : M^n \to \overline{M}^m$ imersão isométrica, e seja $F = I \times M^n \to \overline{M}^m$ uma variação suave de f ($f_0 = F(\cdot, 0) = f$), considere $T = df(Z) + \eta$ o campo variacional decomposto em sua parte tangente e parte normal. Provar que:

   (a) $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}(\mathrm{Vol}_t) = (-n\langle H, \eta\rangle + \mathrm{div}(Z))\mathrm{Vol}_0$, onde Vol_t é a forma de volume associada à $f_t = F(\cdot, t)$ e H é a curvatura média de f.

   (b) Suponha M compacto (com possivel bordo, nesse caso asuma que $f_t(x) = f(x)$ para todo t e $x \in \partial M$), seja $V_t = \int_M \mathrm{Vol}_t$, mostrar que:
   $$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} V_t = -\int_M n\langle H, \eta\rangle \mathrm{Vol}_0$$

   Comentário 1: o exercício anterior mostra que os pontos críticos do funcional "volume"são as imersões mínimas, $H = 0$ (daí o nome). De fato o exercício da a melhor direção para diminuir o volume, que é H. Existe muito trabalho estudando este funcional, tomando segundas derivadas, analizando minimos o maximos locais, etc.

   Comentário 2: outro problema que da para estudar desta forma, é estudar o funcional curvatura escalar "global", isto é, no espaco de métricas riemannianas de M. A cada métrica vc pode associar o funcional que integra a curvatura escalar em M, os pontos críticos são métricas Einstein.

6. Suponha que M é uma variedade completa com $K \geq \frac{1}{r^2} > 0$ e $N \subseteq M$ uma subvariedade fechada e mínima. Seja $p \notin N$, mostrar que:
   $$\mathrm{dist}(p, N) \leq \frac{\pi r}{2}$$

   Comentário: em particular N pode ser uma geodésica fechada, como na esfera sao os circulos geodesicos.

7. Seja M simplesmente conexa completa com $K \leq 0$ (M é uma variedade de Hadamard), seja $f_p(x) = \frac{d(x,p)^2}{2}$ onde $p \in M$, mostrar que:

(a) f_p é geodésicamente convexa, isto é, para qualquer geodésica $\gamma : [0,1] \to M$ temos que para $t \in (0,1)$.

$$f_p(\gamma(t)) < (1-t)f_p(\gamma(0)) + tf_p(\gamma(1))$$

(b) Considere $F_{p_1,\ldots,p_n}(x) = \max\{f_{p_1}(x), \ldots, f_{p_n}(x)\}$, mostrar que ela possui um único mínimo. Denote esse mínimo por $cm_\infty\{p_1, \ldots, p_n\}$, o L^∞-centro de massa.

(c) Suponha que $F : M \to M$ é uma isometria tal que existe $p \in M$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $F^n(p) = p$, mostrar que entao existe $q \in M$ tal que $q = F(q)$

(d) (Teorema de Torsão de Cartan) Suponha N completa e tal que $K \leq 0$, mostrar que o grupo fundamental de N é livre de torsão.

Dica para (a): exercicio 8, parte (a) da lista 8

Dica para (c): conidere q como o centro de massa da órbita de p.

Comentário: veja que parece um pouco com o teorema de Weinsten, respeito os pontos fixos para variedades de curvatura não positiva.

8. Vamos dar uma prova alternativa do teorema de Bishop-Gromov. Seja M tal que $\mathrm{Ric} \geq k$. Em cartas polares em $p \in M$ podemos escrever a forma de volume como $\mathrm{Vol} = \mu(r,\theta)drd\theta$

   (a) Verificar que se $\gamma(t) = \exp_p(t\theta)$ e e_i é uma base do complemento de θ, J_i é o campo de Jacobi ao longo da geodésica tal que $J_i(0) = 0$ e $J'(0) = e_i$, então:

   $$\mu(r,\theta) = \frac{\det(V_1(r), \ldots, V_{n-1}(r))}{\det(e_1, \ldots, e_{n-1})}$$

   (b) Sejam $e_i(t)$ uma base ortonormal paralela a γ, sejam J_i campos de Jacobi tais que $J_i(0) = 0$ e $J_i(r) = e_i(r)$, mostrar que:

   $$\frac{\mu'(r,\theta)}{\mu(r,\theta)} = \sum_{i=1}^{n-1} I_r(V_i, V_i)$$

   (c) Seja $\mu_k(r)$ a densidade em coordenadas polares de uma variedade de curvatura constante k, usando o lema do índice conclua que

   $$\frac{\mu'(r,\theta)}{\mu(r,\theta)} \leq \frac{\mu_k'(r)}{\mu_k(r)}$$

   a partir daqui podemos terminar de provar do mesmo modo que na aula.