

Lista 8, Geometria Riemanniana

Diego N. Guajardo

17 de agosto de 2020

Sempre M é uma variedade Riemanniana, pode-se sempre assumir conexa se for necessário e ∇ indica a conexão de Levi Civita. Alguns exercícios são do Lee, do Do Carmo e do Petersen e de um trabalho de Wolfgang Meyer

1. Considere o hiperplano hiperbólico H^2 , se chamamos de "reta" as geodésicas, dizemos que duas retas são paralelas se não se intersectam. Mostrar que a geometria hiperbólica satisfaz a seguinte propriedade: "Dada uma reta e um ponto fora da reta, existem infinitas geodésicas paralelas que passam por esse ponto"

Comentário: Essa propriedade é a "única" diferença com a geometria euclidiana.

2. Achar todas as variedades completas de curvatura zero (tenho dúvida nessa, tem que ser as orientáveis??)
3. Sejam A, B subvariedades de M e $\Omega_{A,B}(M) = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow M : \gamma(0) \in A, \gamma(1) \in B\}$ (γC^1 por partes), mostrar que os pontos críticos do funcional de energia:

$$E : \Omega_{A,B}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

são geodésicas ortogonais a A e B . Suponha agora que M é completa e que A é compacta e B fechada. Mostrar que existe um ponto crítico.

4. Exercício 1 do capítulo 8 do Do Carmo
5. Exercício 6 do capítulo 8 do Do Carmo
6. Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ imersão isométrica com segunda forma fundamental paralela. Mostrar que o vetor de curvatura média é paralelo. Suponha agora que \overline{M}^m tem curvatura constante c . Mostrar que $\nabla R = 0$ e que $\nabla^\perp R^\perp = 0$
7. Exercício 14 do capítulo 8 do Do Carmo. Conclua que toda forma espacial é localmente simétrica.
8. Suponha que (M, g) tem curvatura $K \leq 0$ e $p \in M$ fixo
 - (a) Vamos mostrar que a segunda forma fundamental das esferas geodésicas centradas em p satisfaz $A \geq \frac{1}{s}I$. Para isso, seja J um campo de Jacobi ortogonal a uma geodésica unitária com $J(0) = 0$, defina

$$\lambda(t) = \frac{\langle A_{\gamma(t)} J(t), J(t) \rangle}{\|J(t)\|^2}$$

verificar que $\lambda' + \lambda^2 \geq 0$. Conclua.

- (b) Mostre que $\text{Hess} \frac{r^2}{2} \geq g$, onde $r(x) = d(p, x)$
- (c) Seja um triângulo geodésico em M (as arestas são geodésicas) com lados de comprimento a, b, c com ângulos opostos α, β, γ , mostrar que:

$$a^2 \geq b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$$

Dica para parte (c): chame p um vértice do triângulo, $\gamma(t)$ a geodésica unitária da aresta oposta a p e defina $f(t) = r^2(\gamma(t))$, notar que $f'' \geq 2$.