Lista 7, Geometria Riemanniana

Diego N. Guajardo

17 de agosto de 2020

Sempre M é uma variedade Riemanniana, pode sempre assumir conexa se for necessario e ∇ indica a conexão de Levi Civita. Alguns exercicios são do Lee, do Do Carmo e do Petersen e de um trabalho de Wolfgang Meyer

1. Seja $r \in C^\infty(M)$ tal que $\partial_r := \operatorname{grad}(r)$ tem norma 1. Seja $S(X) = \nabla_X \partial_r$ (a segunda forma fundamental das hipersuperficies de nível), mostrar que S satisfaz a seguinte equação de Riccati:

$$\nabla_{\partial_r} S + S^2 = -R_{\partial_r}$$

   Mostrar que $r(x) = r_p(x) = d(p, x)$ satisfaz as hipótese do exercicio.

   Comentário: em geral se $A \subseteq M$, então $r(x) = \operatorname{dist}_A(x)$ satisfaz as hipóteses em algum aberto $U = U_A \subseteq M$ para quase qualquer A.

2. Mostre que se M satisfaz alguma das seguintes propriedades, então M é completa
   (a) M é homogénea
   (b) M é 2-homogénea
   (c) $\pi : M \to \overline{M}$ um mapa de recobrimento com $\overline{M}$ completa
   (d) $\exp_p$ esta definida na bola $B_\varepsilon(0_p)$ para ε fixo para todo $p \in M$

3. Mostrar que as seguintes variedades são completas
   (a) G grupo de Lie com métrica bi-invariante
   (b) $\mathbb{H}^n(R)$

4. Suponha que M é completa e X um campo Killing. Mostrar que X é completo.

5. Suponha que M é completo e N uma subvariedade imersa. Mostrar que se N é fechado então N é completa. Mostrar com um contraexemplo que a recíproca não é verdadeira.

6. Suponha M completa. Dada uma subvariedade P de M, dizemos que $p \in M$ é um ponto focal de P, se é um ponto crítico de $E : T^\perp N \to M$, $E(v_p) = \exp_p(v_p)$. Mostrar que se M tem curvatura não positiva e P totalmente geodésica, então P não possui pontos focais.

7. calcular os campos de jacobi de um grupo de lie? ad_X é antisimetrico

8. Dado $k \in \mathbb{R}$, suponha que $g, G \in C^\infty(\mathbb{R})$ tais que:

$$g' \leq -k - g^2$$

$$G' \geq -k - G^2$$

   Mostrar que:
   (a) Se $g(r_0) \geq G(r_0)$, então $g(r) \geq G(r)$ para $r \leq r_0$
   (b) Se $g(r_0) \leq G(r_0)$, então $g(r) \leq G(r)$ para $r \geq r_0$

9. Sejam $\mathrm{sn}_k, \mathrm{cs}_k$ soluções da equação:

$$f'' + kf = 0$$

   com condições iniciais $\mathrm{sn}_k(0) = 0, \mathrm{sn}_k'(0) = 1$ e $\mathrm{cs}_k(0) = 1, \mathrm{cs}_k'(0) = 0$. Defina também $\mathrm{ct}_k = \mathrm{cs}_k/\mathrm{sn}_k$ para t tal que $\mathrm{sn}_k(t) \neq 0$.

(a) Considere $g : (0, a) \to \mathbb{R}$ (com $a < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ se $k > 0$) com

$$g' \leq -k - g^2$$

$$\lim_{t \to 0} g(t) = +\infty$$

Mostrar que $g(r) \leq \mathrm{ct}_k(r)$.

(b) Se M é uma variedade riemanniana tal que $K(\pi) \geq k$ para todo plano π, considere uma geodésica $\gamma(r)$ unitária e um vetor paralelo unitário ortonormal $Y(r)$, mostrar que:

$$\langle AY, Y \rangle' \leq -k - \langle AY, Y \rangle^2$$

onde $A = A(r)$ é o operador de forma da esfera $\mathbb{S}_p(r) = \{x : d(x, p) = r\}$. Conclua que $A_{\gamma(r)} \leq \mathrm{ct}_k(r)\mathrm{Id}$.

Dica: Suponha por absurdo em r_0, temos $g(r_0) > \mathrm{ct}_k(r_0)$, defina: $G(r) = \mathrm{ct}_k(r - \varepsilon)$