

# Lista 6, Geometria Riemanniana

Diego N. Guajardo

17 de agosto de 2020

Sempre  $M$  é uma variedade Riemanniana, pode sempre assumir conexa se for necessário e  $\nabla$  indica a conexão de Levi Civita. Alguns exercicios sao do Lee, do Do Carmo e do Petersen.

1. Seja  $\mathbb{H}^n(R) = \{(x_0, \dots, x_n); x_0 > 0, -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = -R^2\} \subseteq \mathbb{R}^{n,1}$  do espaço de Minkowsky (é a "esfera" neste espaço). Mostrar que:
  - (a)  $\mathbb{H}^n(R)$  é um variedade Riemanniana com a métrica induzida
  - (b) Mostrar que este espaço tem curvatura igual a  $-\frac{1}{R^2}$
2. Seja  $M^n \subseteq M_c^{n+1}$  uma hipersuperfície, onde  $M_c^{n+1}$  é um espaço de curvatura constante  $c$ . Mostrar que:

$$\mathfrak{R}(X \wedge Y) = c(X \wedge Y) + AX \wedge AY$$

onde  $A$  é a segunda forma associada a um dos vetores uniários normais. Calcular também os autovalores. Utilizando o seguinte fato "o operador de curvatura  $\mathbb{C}P^2$  tem como autovalor o zero", mostrar que  $\mathbb{C}P^2$  nao pode ser mergulhado isometricamente em nenhum espaço  $M_c^5$  para nenhum  $c$ .

3. Seja  $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície, definimos a curvatura Gaussiana como o determinante da segunda forma fundamental. Provar que é essa curvatura é intrinseca salvo sinal.  
Dica: usar o exercício anterior.
4. Considere a carta do exercicio 2 da lista 4, mostrar que:

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3} \sum_{k,l} R_{iklj} x^k x^l + O(\|x\|^3)$$

Dica: Fixado  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , considere  $\gamma(t) = (tx_1, \dots, tx_n)$  e a variação por geodésicas  $(tx_1, \dots, t(x_i+s), \dots, tx_n)$ , com vetor associado  $J_i$ . Mostrar que  $t^2 g_{ij}(t) = \langle J_i, J_j \rangle$  e derivar.

Comentário: Fazendo com mais cuidado da para reparar que podemos obter toda a expansão de Taylor, em termos do tensor de curvatura e suas derivadas. Isso ja permite conjecturar que se duas variedades possuem os mesmos tensores de curvatura deveriam ser isométricas, esse exercicio prova isto no caso analítico pelo menos.

5. Utilizando a fórmula anterior, mostrar que:

$$\text{Vol}(B_p(r)) = \text{Vol}(B^{\mathbb{R}^n}(r)) \left( 1 - \frac{S(p)n(n-1)r^2}{6(n+2)} + O(r^3) \right)$$

onde  $S(p)$  é a curvatura escalar.

6. Seja  $I \subseteq \mathbb{R}$  e  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  e  $M = I \times \mathbb{S}^{n-1}$  com a métrica  $g = dr^2 + \varphi^2 h$  onde  $h$  é a métrica da esfera unitária. Calcular que EDO  $\varphi$  deve satisfazer para possuir curvatura escalar nula.

Dica: Defina  $S_r = r \times \mathbb{S}^{n-1} \subseteq M$ , que é uma esfera de curvatura constante. Usar as equações fundamentais para calcular o tensor de curvatura de  $M$ .

Comentário 1: Esse exercício é interessante porque permite ir no outro sentido usual, conhecendo subvariedades podemos calcular o tensor de curvatura da variedade total.

Comentário 2: trabalhando um pouco a EDO, dá para mostrar que existe uma família  $\varphi_\alpha$  de soluções em  $\mathbb{R}$  tais que as métricas associadas não são isométricas.

7. (Vetores Killing) Verificar que:

- (a) O espaço dos vetores Killing  $K$ , é uma álgebra de Lie (com o colchete dos campos vetoriais)
- (b) Seja  $X$  um vetor Killing, e  $\gamma(t)$  uma geodésica. Mostrar que  $X(\gamma(t))$  é um campo de Jacobi
- (c) Mostrar que  $X \rightarrow (X_p, (\nabla X)_p)$  é injetiva. Conclua que  $\dim(K) \leq \frac{n(n+1)}{2}$

Comentário: Essa algebra de Lie é de fato a álgebra de Lie do grupo de isometrias (pelo menos no caso compacto)

8. (O objetivo desse exercício é provar uma recíproca para as equações fundamentais no caso de hipersuperfícies.) Seja  $M$  uma variedade Riemanniana simplesmente conexa que possui um tensor simétrico  $A : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  tal que:

$$\text{(Gauss)} \quad \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle AX, AW \rangle \langle AY, AZ \rangle - \langle AX, AZ \rangle \langle AY, AW \rangle$$

$$\text{(Codazzi)} \quad \nabla_X A(Y) = \nabla_Y A(X)$$

Considere o fibrado  $E = TM \oplus R$  (soma de Whitney), considere  $\xi = (0, 1) \in E$  defina em  $E$  a conexão:

$$\nabla_X^E Y = \nabla_X Y + \langle AX, Y \rangle \xi$$

$$\nabla_X^E \xi = -AX$$

Verificar:

- (a)  $R^E = 0$  (a curvatura de  $E$  é zero)
- (b) Assumindo que curvatura zero implica que o transporte paralelo não depende da curva, mostrar que existe uma isometria plana de fibrados  $\phi : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^{n+1}$  (fibrado trivial com a conexão trivial)
- (c) Defina a 1-forma a valores em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , por  $\omega = \pi_2 \circ \phi|_{TM}$  (onde  $\pi_2$  é a projeção no segundo fator). Mostre que  $d\omega = 0$
- (d) Conclua que existe uma imersão isométrica  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

Comentário 1: Com um pouco mais de trabalho dá para mostrar que o tensor  $A$  é de fato o operador de forma associado à segunda forma da imersão  $f$ .

Comentário 2: Dá para generalizar esse exercício para qualquer codimensão, mas aí tem que trabalhar com um candidato a segunda forma (e não só com o operador de forma) e ele deve satisfazer Ricci também.

Comentário 3: O fato de ser simplesmente conexo é uma hipótese que toda variedade satisfaz localmente, nesse sentido é uma hipótese que não é realmente necessária.

Comentário 4: Existe um teorema que garante que toda variedade Riemanniana pode ser mergulhada isometricamente em  $\mathbb{R}^N$ . Pelo exercício, é suficiente achar um candidato a tensor de segunda forma que satisfaça Gauss, Codazzi e Ricci (muito difícil de achar).

9. Seja  $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_c^m$  uma imersão mínima com  $M$  simplesmente conexo, tal que  $\nu = n - 2$ , onde  $\nu = \dim \Delta$  e  $\Delta = \{X : \alpha(X, \cdot) = 0\}$  chamado de nulidade relativa. Seja  $R_\theta : TM \rightarrow TM$  o tensor que é a identidade em  $\Delta$  e em  $\Delta^\perp$  é uma rotação em  $\theta$  graus. Defina  $\alpha_\theta(X, Y) := \alpha(R_\theta(X), Y)$ , mostrar:

- (a)  $\alpha_\theta$  está bem definido e é simétrico.
- (b)  $\alpha_\theta$  satisfaz Gauss, Codazzi e Ricci. Conclua que existe uma imersão  $f_\theta : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_c^m$  tal que  $\alpha^{f_\theta} = \alpha_\theta$
- (c) Mostrar que  $f_\theta$  é mínima.

Comentário: esse exercício é válido em particular para toda superfície mínima não plana de  $\mathbb{R}^3$ , e tem de fato um exemplo clássico que é dado pela rotação do catenoide no helicoido (tem um Gif maneiro na página em ingles do catenoide na wikipedia).