

Lista 5, Geometria Riemanniana

Diego N. Guajardo

17 de agosto de 2020

Sempre M é uma variedade Riemanniana. Alguns exercicios sao do Lee, do Do Carmo e do Petersen. Os tensores de curvatura nao tem uma convencao única na literatura. Nesta lista (e nas próximas) vamos usar:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

$$\text{Ric}(X, Y) = \frac{1}{n-1} \text{tr}(v \rightarrow R(v, X)Y)$$

$$S = \frac{1}{n} \text{tr}(\text{Ric})$$

1. (Espaços de curvatura constante)

- Provar que \mathbb{R}^n tem curvatura constante 0
- Provar que \mathbb{S}^n tem curvatura constante 1
- Provar que G do exercício 4 do capítulo 1 do do Carmo, tem curvatura constante -1

2. (Interpretações do tensor de Ricci e da curvatura escalar)

(a) $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ operador linear simétrico, mostrar que:

$$\frac{\text{tr}(A)}{n} = \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle Ax, x \rangle$$

isto permite interpretar o traço como um promédio.

(b) Seja $v \in T_p M$ vetor unitário de uma variedade Riemanniana, seja também $\mathbb{S}_v = \{w \in T_p M; \|w\| = 1, \langle w, v \rangle = 0\}$ e π_w o plano gerado por v, w provar que:

$$\text{Ric}(v, v) = \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}_v)} \int_{\mathbb{S}_v} K(\pi_w) dw$$

(c) Mostrar que se \mathbb{S}_p é a esfera unitária em $T_p M$:

$$S(p) = \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}_p)} \int_{\mathbb{S}_p} \text{Ric}(v, v) dv$$

Comentário: Como o tensor de Ricci é simétrico, basta defini-lo nos vetores da parte b). Este item mostra que intuitivamente $\text{Ric}(v, v)$ é a curvatura promédio na direção v . A parte c) mostra que, intuitivamente, a curvatura escalar mede duas vezes a curvatura promédio em p (note que na integral aparece v e $-v$, deveriamos integrar sobre $\mathbb{R}P^{n-1}$ e não sobre a esfera)

3. Seja G um grupo de Lie com uma métrica invariante, mostrar que para campos invariantes pela esquerda:

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4} [Z, [X, Y]]$$

conclua que se π é um plano gerado por dois campos ortonormais invariantes pela esquerda X, Y (todo plano é dessa forma) temos que:

$$K(\pi) = \frac{1}{4} \|[X, Y]\|^2$$

Mostrar que $\text{Ric}(X, X) = 0$ se, e somente se, X comuta com todo elemento da algebra.

Comentário: Isto mostra que todo grupo de Lie com métrica bi-invariante possui curvatura não negativa, e que além disso, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\text{Ric} \geq \varepsilon g$ se o centro de G é discreto.

4. Seja $\lambda > 0$, considere a métrica $h = \lambda g$. Relacionar os tensores de curvatura, Ricci e escalar. Relacionar as curvaturas seccionais.
5. (Operador de curvatura)

- (a) Provar que pelas simetrias do tensor de curvatura existe um operador $\mathfrak{R} : \Lambda^2 TM \rightarrow \Lambda^2 TM$, chamado operador de curvatura, tal que:

$$\langle \mathfrak{R}(x \wedge y), z \wedge w \rangle = \langle R(x, y)w, z \rangle$$

(notar que z e w ficam invertidos)

- (b) Mostrar que M tem curvatura constante k se, e somente se, $\mathfrak{R}(w) = kw, \forall w \in \Lambda^2 TM$
- (c) Suponha o caso de que existe uma base ortonormal $\{e_i\}$ de $T_p M$ tal que $\mathfrak{R}_p(e_i \wedge e_j) = \lambda_{ij} e_i \wedge e_j$ (para $i < j$). Mostrar que neste caso, $K(\pi) \in [\min \lambda_{ij}, \max \lambda_{ij}]$ para todo π plano de $T_p M$. (essa base nem sempre existe, um contra exemplo é $\mathbb{C}P^2$)
- (d) Seja $\lambda_p = \max\{K(\pi); \pi \subseteq T_p M \text{ plano}\}$. Provar que existe uma constante $c(n)$, que só depende da dimensão de M^n tal que:

$$|\mathfrak{R}_p| \leq c(n)\lambda_p$$

6. (Esferas Berger) Por simplificação suponha $\lambda_1 = \varepsilon < 1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Calcular o operador de curvatura e conclua que a curvatura da esfera toma valores em $[\varepsilon^2, 4 - 3\varepsilon^2]$
7. (Fórmula de O'Neill) Suponha que $\pi : \bar{M} \rightarrow M$ é uma submersão Riemanniana. Provar que:

$$R(W, X, Y, Z) \circ \pi = \bar{R}(\bar{W}, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) - \frac{1}{2} \langle [\bar{W}, \bar{X}]^v, [\bar{Y}, \bar{Z}]^v \rangle - \frac{1}{4} \langle [\bar{W}, \bar{Y}]^v, [\bar{X}, \bar{Z}]^v \rangle + \frac{1}{4} \langle [\bar{W}, \bar{Z}]^v, [\bar{X}, \bar{Y}]^v \rangle$$

Conclua que se W, X são ortonormais:

$$K(\text{span}\{X, W\}) = K(\text{span}\{\bar{X}, \bar{W}\}) + \frac{3}{4} \|[\bar{W}, \bar{X}]^v\|^2$$

8. Mostrar que em $\mathbb{C}P^n$, a curvatura seccional toma valores desde 1 até 4. Mostrar que é uma variedade de Einstein, isto é, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\text{Ric} = \lambda g$$

Comentário 1: Isto mostra que se bem $\mathbb{C}P^n$ não tem curvatura constante mas "quase"; em qualquer direção, a curvatura médio nessa direção é λ .

Comentário 2: Veja o enunciado do teorema 1 do capítulo 13 do do Carmo. Este exercício mostra que $h = \frac{1}{4}$ é cota ótima (pelo menos em dimensão par e maior que 2).

9. (k-homogêneo)

- (a) Suponha que M é homogêneo, mostrar que M tem curvatura escalar constante
- (b) Suponha que M é 2-homogêneo. Mostrar que M é Einstein
- (c) Suponha M é 3-homogêneo. Mostrar que M tem curvatura constante.

10. (Identidade de Bianchi)

- (a) Provar a segunda identidade de Bianchi (exercício 7 do capítulo 4 do do Carmo)
- (b) Provar a identidade de Bianchi contraída:

$$2\text{divRic} = ndS$$

Conclua que o tensor de Einstein $G = \text{Ric} - \frac{n}{2}Sg$ tem divergência zero

Comentário: O tensor de Einstein é importante na teoria da relatividade, e o fato de ter divergência zero é interpretado como uma conservação da energia e do momentum.

11. Exercício 8 do capítulo 4 do do Carmo

12. Exercício 10 do capítulo 4 do do Carmo (notar que a dica é a identidade de Bianchi contraída)