Lista 3, Geometria Riemanniana

Diego N. Guajardo

17 de agosto de 2020

Sempre M é uma variedade Riemanniana e ∇ é a conexão de Levi Cevita. Alguns exercicios sao do Lee, do Do Carmo e do Petersen.

1. (Contas) Dada uma função $u \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, mostrar que:
$$\text{grad}(u) = (\nabla u)^\#$$
$$\text{div}(X) = tr(v \to \nabla_v X)$$
Onde "tr"indica o traço do operador linear indicado. Definimos o Hessiano de u como $\text{Hess}(f) = \nabla\nabla f$. Mostrar que o Hessiano é simétrico. Por este motivo, existe um operador H simétrico tal que:
$$\text{Hess}(f)(X, Y) = (HX, Y)$$
Expressar H e conclua que $\Delta f = tr(v \to Hv)$
Comentário: em muitos livros chamam H como o Hessiano de f. De algum modo sao "os mesmos"("módulo g", a métrica), isso é MUITO típico, do mesmo modo que "$\text{grad}(u) = \nabla u$"("módulo g") mesmo sendo tensores em espacos diferentes (o primeiro é um vetor e o segundo é uma 1-forma)

2. Exercício 2 do capítulo 2 do Do Carmo

3. Exercício 8 do capítulo 2 do Do Carmo

4. Sejam duas métricas relacionadas por $\overline{g} = e^{2\varphi}g$ onde $\varphi \in C^\infty(M)$, mostrar que as conexões de Levi-Cevita estão relacionadas por:
$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \big(d\varphi(X)Y + d\varphi(Y)X - g(X, Y)\text{grad}(\varphi)\big)$$
Em particular, se φ é constante a conexão é a mesma.

5. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo tal que $\nabla_X X = 0$. Mostrar que as curvas integrais são geodésicas.

6. Seja G um grupo de Lie com uma métrica bi-invariante. Mostrar que $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ para $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ invariantes pela esquerda.

7. (Esferas Berger) Seja $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{H}$ o grupo de Lie dos quaternios unitários. Sejam $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$ os campos invariantes pela esquerda tais que no ponto $1 = (1, 0, 0, 0)$ temos $X_1 = (0, 1, 0, 0), X_2 = (0, 0, 1, 0)$ e $X_3 = (0, 0, 0, 1)$ (sob a identificação $T_1\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4$). Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ e g uma métrica invariante pela esquerda tal que $\{\lambda_i^{-1} X_i\}$ é uma base ortonormal. Calcular:
    - Provar que $[X_i, X_{i+1}] = 2X_{i+2}$ índices módulo 3.
    - Calcular $\nabla_{X_i} X_j$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$

8. Seja $F : M \to N$ uma submersão Riemanniana. Dados $X \in \mathfrak{X}(N)$, vamos denotar por $\overline{X} \in \mathfrak{X}(M)$ o levantamento horizontal de X, e dado $Z \in \mathfrak{X}(M)$, denotamos por Z^v a compononente vertical de Z. Provar que:
    - $T : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N) \to \mathfrak{X}(M)$ dado por $T(X, Y) = [\overline{X}, \overline{Y}]^v$ é um tensor.
    - Mostrar que $\nabla_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{\nabla_X Y} + \frac{1}{2}T(X, Y)$, onde as conexões são de M e N respetivamente.

    Comentário: O tensor $T : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{V}$ é chamado tensor de integrabilidade porque mede a integrabilidade da distribuição horizontal (no sentido de Frobenius)

9. Do exercício 10 da lista 1, sabemos que $\mathbb{S}^{2n+1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^n$ é uma submersão Riemanniana. Provar que neste caso:

$$(\nabla_{\overline{X}}\overline{Y})^v = \frac{1}{2}T(X,Y) = \langle \overline{Y}, i\overline{X}\rangle V$$

onde V é um campo unitário em $\mathbb{S}^{2n+1}$ vertical apropriado e o produto é a métrica de $\mathbb{S}^{2n+1}$, onde identificamos o tangente como um subespaco de $\mathbb{C}^{m+1}$. Conclua assim que a distribuição horizontal não é integrável.

10. (Variedades Kähler) Seja J uma estrutura quase-complexa, isto é, $J : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é um tensor tal que $J^2 = -\mathrm{Id}$. Suponha que é compatível com a métrica:

$$g(JX, JY) = g(X,Y)$$

E seja então a 2-forma não degenerada: $\omega(X,Y) = g(X, JY)$. Mostrar que $\nabla J = 0 \Rightarrow d\omega = 0$.

Comentário: tem uma recíproca se J é complexa, isto é, o tensor de Nijenhuis associado a J é zero:

$$N_J : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

$$N_J(X,Y) = [JX, JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [X,Y] = 0$$

Neste caso se $d\omega = 0$ entao $\nabla J = 0$.