Geometria Riemanniana - Março/Junho 2018

Lista para Entregar!
A entrega deve ser feita até dia 03/05, lembre que irei disponibilizar outra lista dia 03/05

1. O Teorema de Hadamard apresentado em aula continua válido se substituir curvatura seccional por escalar? e por curvatura de Ricci? justifique provando ou fornecendo contra-exemplos.

2. Um variedade Riemanniana é dita ser $k-$homogênea se para todo par de pontos $(p_1, \ldots, p_k)$ e $(q_1, \ldots, q_k)$ com $d(p_i, p_j) = d(q_i, q_j)$ existe uma isometria φ tal que $\varphi(p_i) = q_i$.

   (a) Mostre que um espaço homogêneo tem curvatura escalar constante.

   (b) Mostre que se (M, g) é $2-$homogêneo, então (M, g) é uma metrica Einstein.

3. Mostre que se uma variedade Riemanniana M^n admite uma função $f : M \to \mathbb{R}$ própria e Lipschitz (em relação a distância) então ela é completa.

   Definição 1. *Uma linha numa variedade completa é uma geodésica $\gamma : \mathbb{R} \to M$ tal que γ minimiza a distância entre $\gamma(t)$ e $\gamma(s)$, para todo $s, t \in \mathbb{R}$*

4. Seja M uma variedade Riemanniana completa de dimensão n, e k o número de componentes conexas ilimitadas de $M - R$. Prove que M possui pelo menos $k(k-1)/2$ linhas.

5. Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana com curvatura seccional negativa e dimensão $n \leq 3$. Prove que não existe imersão isometrica de M em $\mathbb{R}^{n+1}$. E se $n = 2$ existe?

6. Considere a hipersuperfície $x_{n+1} = x_n^2$, M^n. Mostre que o operador forma não é zero, mas que a M é isometrica a $\mathbb{R}^n$.

7. Seja $\varphi M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica. Se M for fechada (compacta sem bordo), prove que existe $p \in M$ e $\xi \in T_p^{\perp}M$ não nulo tais que $A_\xi : T_pM \to T_pM$ é positivo definido.

8. Exercício 1 capítulo VI, Do Carmo.

   Obs.: Lembre que para a prova é importante que façam TODOS os exercícios do livro do Manfredo.