Geometria Riemanniana - Março/Junho 2018

Lista para Entregar!
A entrega deve ser feita até dia 26/03, lembre que irei disponibilizar outra lista dia 26/03

1. (a) Seja f uma função suave sobre uma variedade Riemanniana M. Mostre que f é convexa (resp. estritamente convexa) se $\operatorname{Hess} f$ é não negativo (resp. positivo definido). Mostre que se f é (estritamente) convexa então $\operatorname{Hess} f$ é não negativo.

   (b) Seja A um aberto covexo de M, e assuma que a curvatura seccional de M é não positiva sobre A. Dado $p \in A$, ponha $r(q) = d(p, q)$. Mostre que a função $r : A \to \mathbb{R}$ é convexa sobre A.

   (c) Mostre que a função distância $d : A \times A \to \mathbb{R}$ é convexa.

2. Seja M uma variedade Riemanniana, $p \in M$. Mostre que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\dfrac{d(\exp_p v, \exp_p w)}{|v - w|} = 1 \pm O(\varepsilon^2)$ para todo $v, w \in B(p; \delta)$.

3. Seja M uma variedade Riemanniana conexa de dimensão n, e G um grupo de Lie que age em M por isometrias tal que para todo $g \in G$, $g \neq e$, existe $p \in M$ tal que $g \cdot p \neq p$. Mostre que $\dim G \leq n(n+1)/2$ e que se acontece a igualdade então M tem curvatura seccional constante.

4. Sejam $\varphi_n : M \to N$ isometrias entre variedades Riemannianas tal que $\{\varphi_n\}_n$ converge uniformemente, na topologia $C^0(M)$, a uma função $\varphi : M \to N$. Mostre que φ é uma isometria.

5. Seja M^n uma variedade Riemanniana, e φ uma isometria de M^n. Prove que se o conjunto dos pontos fixos $Fix(\varphi) = \{x \in M : \varphi(x) = x\}$ possui um ponto de acumulação em M, então F contém alguma geodésica de M.

   Obs.: Lembre que para a prova é importante que façam TODOS os exercícios do livro do Manfredo.