Geometria Riemanniana - Março/Junho 2018

Lista para Entregar!
A entrega deve ser feita até dia 12/03, lembre que irei disponibilizar outra lista dia 12/03

1. Prove que, para cada conexão ∇ sobre uma variedade suave M, o tensor de torção T se anula num ponto $p \in M$ se, e somente se, existe uma carta $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ para a qual os símbolos de Christoffel da conexão se anulam em p.

2. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ suave, assuma que
$$|\nabla f| = 1$$
sobre M. Mostre que as curvas integrais de ∇f são geodésicas.

3. Mostre que para cada variedade riemanniana M, a função de distância pode ser dada analiticamente por
$$d'(x,y) = \sup\{|\psi(x) - \psi(y)|; \quad \psi \in C^\infty(M) \quad |\nabla\psi| \leq 1\}$$
onde ψ varia sobre todas funções suaves para as quais $|\nabla\psi| \leq 1$ em M.

4.
   - Seja ∇ uma conexão afim em M, defina $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$. Prove que T é um tensor (i.e. T é $C^\infty(M)$-linear). T é chamado tensor de torção;
   - Sejam ∇^0, ∇^1 conexões afims em M. Mostre que a diferença $A(X,Y) = \nabla^0_X Y - \nabla^1_X Y$ é um tensor;
   - Mostre que as conexões ∇^0, ∇^1 de b. determinam as mesmas geodésicas se e só se A é antisimetrico.
   - Mostre que as conexões ∇^0, ∇^1 de b. possuem o mesmo tensor de torção se e só se A é simetrico.

5. Seja M^2 uma variedade Riemanniana conexa, $j : M^2 \to M^2$ uma isometria ($j \neq Id$) e $\alpha : [0,1] \to M^2$, uma curva parametrizada por comprimento de arco. Mostre que se α é fixada por j, isto é, $j \circ \alpha = \alpha$ então α é uma geodésica.

6. (Bônus)[1] Exercícios do livro do Manfredo, Cap II, exercícios 2,4, e 5. Cap III, exercícios 2,5,6 e 7.

[1]Veja a observação.

Obs.: Lembre que para a prova é importante que façam TODOS os exercícios do livro do Manfredo.