Lista não é para Entregar!

1. Sejam N^n e M^m variedades Riemannianas compactas, mostre que $N \times M$ não admite uma métrica tal que $K < 0$.

2. Seja M^m uma variedade Riemanniana compacta e $p, q \in M$ pontos tais que $d(p,q) = diamM$. Mostre que para todo $V \in T_pM$, existe uma geodésica minimizante γ que liga p à q com $\langle \gamma', V \rangle \geq 0$.

3. Seja M^n uma variedade Riemanninana isometrica ao Espaço Euclidiano fora de algum compacto $K \subset M$, isto é, $M - K$ é isometrica à $\mathbb{R}^n - C$ para algum compacto $C \subset \mathbb{R}^m$. Mostre que se $Ric_M \geq 0$, então $M = \mathbb{R}^n$.

4. Seja M^n uma variedade Riemanninana compacta com $Ric_M \geq 0$. Mostre que seu recobrimento universal $\tilde{M}^n$ *splits* isometricamente como um produto $N \times \mathbb{R}^p$, onde N é compacta.

5. Seja M^n uma variedade Riemanninana compacta com $Ric_M \geq 0$ tal que exista $p \in M$ com $Ric_M(p) > 0$. Mostre que o recobrimento universal de M é compacto.

6. Mostre que $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^1$ não admite nenhuma metrica com $Ric = 0$ para $p = 2, 3$.

7. Se $f : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função concava, então todo *superlevel set* $A = \{x \in M \,|\, f(x) \geq a\}$ é totalmente convexo, isto é, qualquer geodésica com extremos em A deve estar contida em A.

8. Seja M^n uma variedade Riemanninana com $K_M \geq 0$ e $p \in M$. Se pegarmos todos raios $\{\gamma_\alpha\}$ saindo de p e construirmos o mapa

$$f = inf_\alpha b_{\gamma_\alpha},$$

onde b_γ são as funções de Busemann, mostre que f é própria e concava.

9. Seja M^n uma variedade Riemanninana não compacta com $K_M \geq 0$. Se $A \subset M^n$ é um conjunto totalmente convexo compacto, então a função distância $d(., \partial A)$ é uma função concava, onde ∂A é o bordo topológico de A.

10. (Difícil) Seja M^n uma variedade Riemanninana não compacta com $K_M \geq 0$. Mostre que existe uma subvariedade compacta totalmente convexa.

11. Mostre que a volta do Teorema de Toponogov é verdade. Em outras palavras, se para algum k a conclusãod do Teorema de Toponogov vale quando triangulos geodésicos são comparados com os mesmos objetos em $\mathbb{S}^2_k$, então $K_M \geq k$.