Lista 8, Geometria Riemanniana 2016

Para entregar 30 de junho

1. Decida se existem, ou não, métricas com curvatura $K > 0$,$K \geq 0$, $K < 0$, $K \leq 0$ e $Ric > 0$ nas seguintes variedades de dimensão 4: $\mathbb{S}^4$, $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$, T^4, $T^2 \times \mathbb{S}^2$. Faça uma tabela, e justifique.

2. Prove o converso do teorema de Toponogov: se M verifica a conclução do teorema de toponogov para H então $K_M \geq H$.

3. Seja M uma variedade Riemanniana compacta e $p, q \in M$ tal que $d(p, q) = diam(M)$. Mostre que para todo $v \in T_pM$, existe uma geodésica minimizante γ de p a q tal que $\langle \gamma', v \rangle \geq 0$.

4. Sejam M, N variedades compactas. Mostre que $M \times N$ não admite uma métrica de curvatura seccional estritamente negativa.

5. Seja $\gamma : (0, \infty) \to M$ um raio, i.e. $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |t - s|$, em uma variedade Riemanniana completa. Defina $b_t(x) = d(x, \gamma(t)) - t$ para $x \in M$.

   a. Mostre que $b_\gamma(x) = \lim_{t\to\infty} b_t(x)$ existe. b_γ é chamada uma função de Buseman.

   b. Mostre que se $K_M \geq 0$ então b_γ é concava.