Lista 5, Geometria Riemanniana 2016

Para entregar 19 de maio

1. Dadas duas variedades Riemannianas (M, g), (N, h) e uma função positiva $f \in C^\infty(M)$ definimos o *warped product* $M \times_f N$ como a variedade Riemanianna $(M \times N, j)$ com métrica j dada por
$$j(X,Y) = g(d\pi_M X, d\pi_M Y) + [f(p)]^2 h(d\pi_N X, d\pi_N Y),$$
para todo $X, Y \in T_{(p,q)}M \times N$, onde π_M, π_N são as projeçoes canonicas. Mostre que $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$ é isometrico ao espaço hiperbolico $\mathbb{H}^{n+1}$.

2. (Ex. 5 Cap. 6 Do Carmo) Prove que a curvatura seccional da variedade Riemanniana $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ com a métrica produto, onde $\mathbb{S}^2$ é a esfera unitaria em $\mathbb{R}^3$, é não negativa. Ache um toro plano, totalmente geodésico mergulhado em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.

3. Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana com curvatura seccional negativa e dimensão $n \geq 3$. Prove que não existe imersão isometrica de M em $\mathbb{R}^{n+1}$.

4. (Ex. 5 Cap. 7 Do Carmo) Uma curva divergente em uma variedade Riemanniana M é uma aplicação diferenciavel $\alpha : [0, \infty) \to M$ tal que para todo compacro $K \subset M$ existe um t_0 tal que $\alpha(t) \notin K$ para todo $t > t_0$. Prove que M é completa se e somente se o comprimento de qualque curva divergente é ilimitado.

5. Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e X um campo de Killing.

   a. Mostre que
   $$\frac{1}{2}\Delta(|X|^2) = -Ric(X,X) + \sum_{i=1}^{n} |\nabla_{e_i} X|^2,$$
   onde $\{e_i\}$ é um referencial ortonormal.

   b. Se M é compacta, e a curvatura de Ricci é não-positiva ($Ric(v,v) \leq 0$ para todo $v \in TM$), mostre que todo campo de Killing X é paralelo. Se a curvatura de Ricci é não-positiva e existe $p \in M$ tal que $Ric_p(v,v) < 0$ (desigualdade estrita), para todo $v \in T_pM$, $v \neq 0$, prove que todo campo de Killing X é identicamente nulo.