Lista 4, Geometria Riemanniana 2016

Para entregar 5 de maio

1. Considere a base
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$
para a algebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$. Para cada numero positivo a, seja g_a a metrica invariante à esquerda em $SU(2)$ tal que aX, Y, Z é uma base ortonormal. Calcule as curvaturas seccionais respeito aos planos gerados por $(X,Y), (Y,Z)$ e (X,Z).

2. Seja M uma variedade Riemanniana conexa de dimensão n, e G um grupo de Lie que age em M por isometrias tal que para todo $g \in G$, $g \neq e$, existe $p \in M$ tal que $g \cdot p \neq p$. Mostre que $dim\, G \leq n(n+1)/2$ e que se acontece a igualdade então M tem curvatura seccional constante.

3. Seja G um grupo de Lie com uma metrica bi-invariante g:

   a. Mostre que G tem curvatura seccional não negativa.

   b. Seja $H \subset G$ um subgrupo de Lie, mostre que H é totalmente geodesico.

   c. Se H é conexo, mostre que H é plano com a metrica inducida see H é abeliano.

   (Dica: faza os exercicios de grupos de Lie dos cap. 3 e 4 do Do Carmo).

4. Seja M uma variedade Riemanniana com curvatura seccional não positiva. Prove que, para todo p, o lugar dos pontos conjugados $C(p)$ é vazio.

5. (Ex. 8 Cap. 5 Do Carmo) Seja $\gamma : [a,b] \to M$ uma geodésica e X um campo de Killing em M.

   a. Mostre que a restrição $X(\gamma(s))$ de X a $\gamma(s)$ é um campo de Jacobi ao longo de γ.

   b. Use o item a. para mostrar que se M é conexa e existe p tal que $X(p) = 0$ e $\nabla_Y X(p) = 0$, para todo $Y \in T_pM$, então $X = 0$ em todo M.