Lista 3, Geometria Riemanniana 2016

Para entregar 21 de abril

1. Dada uma função $f : N \to M$ suave e um fibrado vetorial $\pi : E \to M$:

   a. Defina o fibrado vetorial *pull-back* $f^*(E)$ sobre N.

   b. Prove que se ∇ é uma conexão em E, então existe uma única conexão "natural" ∇^f em $f^*(E)$ tal que $\nabla^f_X(s \circ f) = \nabla_{f_*X} s$ para todo $X \in TN$ e $s \in \Gamma(E)$. Analogamente, uma métrica Riemanniana em E induz naturalmente uma métrica Riemanniana em $f^*(E)$.

   c. Mostre que se E é um fibrado Riemanniano e ∇ é compatível com a métrica de E, ∇^f é compatível com a métrica de $f^*(E)$.

2. Sejam $f, g : M \to N$ isometrias locais entre variedades Riemannianas e $p \in M$ tal que $f(p) = g(p)$, $df_p = dg_p$. Suponha que M é conexo, mostre que $f = g$.

3. Sejam $\phi_n : M \to N$ isometrias entre variedades Riemannianas tal que $\{\phi_n\}$ converge uniformemente, na topologia C^0, a uma função $\phi : M \to N$. Mostre que ϕ é uma isometria.

4. (Ex. 14 Cap. 3 Do Carmo) Seja M uma variedade Riemanniana. Prove que se G é o campo geodésico de TM então $divG = 0$ (*div* respeito à métrica em TM dada pelo ex. 2 cap. 3 Do Carmo). Conclua daí que o fluxo geodésico preserva o volume de TM.

5. Seja ∇ uma conexão afim em M. Podemos definir o tensor de curvatura

   $$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

   tal qual se faz no caso Riemanniano. Prove que são equivalentes:

   a. $R \equiv 0$. Em este caso dizemos que ∇ é plana.

   b. Para todo ponto, existem campos $E_1, E_2, ..., E_n$, em uma vizinhança do ponto, que formam uma base de TM e tal que $\nabla E_i = 0$, $i = 1, .., n$.

   c. Para todo $p, q \in M$, o transporte paralelo ao longo de uma curva γ de p a q só depende da clase de homotopia de γ.

   d. Para todo $p \in M$, existe uma vizinhanza de p tal que o transporte paralelo ao longo de qualquer curva fechada dentro da vizinhanza é a identidade.