Lista 2, Geometria Riemanniana 2016
Para entregar 7 de abril

1. Seja (N,g) uma variedade Riemanniana de dimensão n, e $M \subseteq N$ uma subvariedade mergulhada de dimensão m. Mostre que para todo $p \in M$ existe uma vizinhança aberta $U \subset N$ de p e campos vetoriais $E_1, ..., E_n$ em U, tal que $E_1(q), ..., E_n(q)$ é uma base ortonormal de T_qN para todo $q \in U$ e $E_1(r), ..., E_m(r)$ são tangentes a M para todo $r \in U \cap M$.

2. Seja $p : E \to M$ um fibrado vetorial. Uma conexão em E é uma função $\nabla : \Gamma(E) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(E)$, levando (s, X) em $\nabla_X s$, que satisfaz:

   - $\nabla_{fX+gY} s = f\nabla_X s + g\nabla_Y s$.
   - $\nabla_x(s_1 + s_2) = \nabla_X s_1 + \nabla_X s_2$.
   - $\nabla_X(fs) = (Xf)s + f\nabla_X s$.

   Para todo $s, s_1, s_2 \in \Gamma(E)$, $X, Y \in \Gamma(TM)$ e $f, g \in C^\infty(M)$. Mostre que:

   a. Se $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ verificam $s_1|_U = s_2|_U$, para um aberto U em M, então $(\nabla_X s_1)|_U = (\nabla_X s_2)|_U$ para todo $X \in \Gamma(TM)$. Assim, faz sentido fazer derivaçoes de seçoes locais do fibrado.

   b. Mostre que $\nabla_X s(p)$ só depende do valor de X em p e do valor de s numa curva com derivada $X(p)$, i.e. para todo $Y \in \Gamma(TM)$, $s_1 \in \Gamma(E)$ tais que $Y(p) = X(p)$, $s_1(\alpha(t)) = s(\alpha(t))$, onde $\alpha(t)$ é uma curva com $\alpha'(0) = X(p)$, se tem $\nabla_Y s_1(p) = \nabla_X s(p)$.

3. a. Seja ∇ uma conexão afim em M, defina

   $$\tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

   Prove que τ é um tensor (i.e. τ é $C^\infty(M)$-linear). τ é chamado tensor de torção.

   b. Sejam ∇^0, ∇^1 conexões afims em M. Mostre que a diferença

   $$A(X,Y) = \nabla^1_X Y - \nabla^0_X Y$$

   é um tensor.

c. Mostre que as conexões ∇^0, ∇^1 de b. determinam as mesmas geodésicas se e só se A é antisimetrico.

d. Mostre que as conexões ∇^0, ∇^1 de b. possuem o mesmo tensor de torção se e só se A é simetrico.

4. (Ex. 2 Cap. 2 Do Carmo) Sejam X, Y campos de vetores em M. Sejam $p \in M$ e $c : I \to M$ uma curva tal que $c'(t_0) = X(p)$. Prove que

$$(\nabla_X Y)(p) = \frac{d}{dt}(P_{c;t_0;t}^{-1}(Y(c(t))))\Big|_{t=t_0},$$

onde $P_{c;t_0;t} : T_{c(t_0)}M \to T_{c(t)}M$ é o transporte paralelo ao longo de c de t_0 a t.

5. (Ex. 2 Cap. 3 Do Carmo)