Lista 1, Geometria Riemanniana 2016

M, $\tilde{M}$ são variedades suaveis e $\Gamma(TM)$ denota os campos vetorias suaves em M.

1. Seja $X : M \to TM$ um campo vetorial, prove que são equivalentes:

   a. $X : M \to TM$ é uma função suave.

   b. Para toda função suave f de M em $\mathbb{R}$, $Xf : M \to \mathbb{R}$, dada por $(Xf)(p) = X(p)f$, é suave.

   c. Para todo sistema de coordenadas (U, x), se escrevemos X na base do espaço tangente dada pelo sistema de coordenadas

   $$X = \sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

   Então as funçoes α_i são suaveis.

2. Seja $f : M \to \tilde{M}$ uma imersão e $X \in \Gamma(TM)$. Mostre que para todo $p \in M$ existe uma vizinhança V de p e um campo $\tilde{X} \in \Gamma(T\tilde{M})$ tal que $\tilde{X}(f(q)) = df_q(X(q))$, para todo $q \in V$.

3. Seja $M \subseteq \tilde{M}$ uma subvariedade mergulhada e $X \in \Gamma(TM)$. Mostre que existe um aberto $U \subseteq \tilde{M}$ contendo M e um campo $\tilde{X} \in \Gamma(TU)$ tal que $\tilde{X}|_M = X$.

4. Seja $M \subseteq \tilde{M}$ uma subvariedade mergulhada e $\tilde{X} \in \Gamma(T\tilde{M})$. Mostre que $\tilde{X}$ é tangente a M nos pontos de M se e só se $(\tilde{X}f)|_M = 0$ para toda função $f \in C^\infty(\tilde{M})$ constante em M.

5. (Ex. 7 Cap. 1 Do Carmo) Seja G um grupo de Lie compacto e conexo. Mostre que G possui uma métrica bi-invariante.

6. Uma variedade Riemanniana (M, g) é dita completa quando toda seqûencia de Cauchy em M é convergente. Prove que toda variedade M admite uma métrica g tal que (M, g) seja completa.

7. Sejam $X, Y \in \Gamma(TM)$, $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(T\tilde{M})$ campos vetorias e $f : M \to \tilde{M}$ uma função suave. Dizemos que X esta f-relacionado com $\tilde{X}$ se $df_p(X(p)) = \tilde{X}(f(p))$ para todo $p \in M$. Mostre que se X esta f-relacionado com $\tilde{X}$ e Y esta f-relacionado com $\tilde{Y}$, então $[X, Y]$ esta f-relacionado com $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$.