Lista para Entregar!

A entrega deve ser feita até dia **16/04**, Lembre que irei disponibilizar outra lista dia **13/04**.

Exercícios do livro do Manfredo (5$^{\underline{a}}$ edição):
Cap II: **04, 05 e 07**;
Cap III: **05, 07 e 09**.

1. Seja $f, g : M^n \to N^n$ isométrias entre variedades Riemannianas M^n, N^n conexas. Mostre que se existe $p \in M^n$ tal que $f(p) = g(p)$ e $f_{*p} = g_{*p}$ então $f = g$.

2. Seja $f : (M^n, g_1) \to (N^n, g_2)$ um difeomorfismo entre variedades Riemannianas M^n, N^n conexas que preserva distâncias, isto é,

$$d_{g_1}(p, q) = d_{g_2}(f(p), f(p))$$

Para todos pontos $p, q \in M$. Mostre que f é uma isometria.

3. Seja M^2 uma variedade Riemanniana conexa, $j : M^2 \to M^2$ uma isometria $(j \neq Id)$ e $\alpha : [0, 1] \to M^2$, uma curva parametrizada por comprimento de arco. Mostre que se α é fixada por j, isto é, $j \circ \alpha = \alpha$ então α é uma geodésica.

4. Seja M^n uma variedade Riemanniana e $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave tal que ∇f é um campo unitário. Prove que as curvas integrais de ∇f são curvas que minimizam globalmente a distância, isto é, para $\alpha : (a, b) \to M$ curva integral de ∇f, então

$$d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) = \text{comprimento de } \alpha|_{[t_1,t_2]}, \ \forall t_1, t_2 \in (a, b)$$

Conclua que toda curva integral de ∇f é geodésica.

Obs.: Lembre que para a prova é importante que façam TODOS os exercícios do livro do Manfredo.