Exercício 1. Uma variedade Riemanniana (M^n,g) é dita completa quando toda sequência de Cauchy em M^n é convergente. Prove que toda variedade Riemannian (M^n,g) admite uma métrica $\widetilde{g}$ tal que (M^n,$\widetilde{g}$) é completa.

Exercício 2. Dê um exemplo de variedade Riemanniana (M^n,g) completa, não compacta e de volume finito.

Exercício 3. Mostre que os tensores $T \in \mathcal{X}^r(M)$ definidos em aula como elementos em $\Gamma(Hom(TM \times TM \times ... \times TM, \mathbb{R}))$ podem ser identificados com as funções $\mathcal{F}(M)$-multilineares $\widehat{T} : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times ... \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$.

Exercício 4. Seja ∇f o gradiente e $Hessf$ o Hessiano de f, definidos de forma tal que para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$,

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f),$$
$$Hessf(X,Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f.$$

Mostre que $Hessf(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle$ e que tais definições coincidem com as usuais no Euclidiano.

Exercício 5. Seja M^n uma variedade Riemanniana e $X \in \mathcal{X}(M)$, definimos divergente de X como $divX = tr(\nabla_{\bullet} X)$. Um campo $X \in \mathcal{X}(M)$ é dito incompressível se $divX = 0$.

a) Seja M^n orientável, Mostre que X é imcompressível se e somente se seu fluxo preserva o volume ($\phi_t^* dvol = dvol$).

b) Seja $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ um campo unitário. Mostre que se X é incompressível então $\nabla_{\bullet} X = 0$.

c) Encontre um campo $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ unitário incompressível tal que $\nabla_{\bullet} X \neq 0$.