Análise em Variedades - Agosto/Novembro 2017

Lista 6

*Denotaremos $X \equiv Y$ para designar que os espaços topológicos $X$ e $Y$ tem o mesmo tipo de homotopia. Se duas funções $F, G\colon X \to Y$ são homotópicas, escreveremos $F \cong G$.*

1. Se os homeomorfismo $f, g : X \to Y$ são homotópicos , seus inversos $f^{-1}, g^{-1} : Y \to X$ também são.

2. Seja $E = \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R}\}$ o eixo vertical de $\mathbb{R}^3$. Mostre que $\mathbb{R}^3 - E$ tem o mesmo tipo de homotopia do círculo $\mathbb{S}^1$. Mais geralmente, se $p < n$, $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^p$ tem o mesmo tipo de homotopia de $\mathbb{S}^{n-p-1}$.

3. A faixa de Moebius tem o mesmo tipo de homotopia do cilindro $\mathbb{S}^1 \times I$ mas não é homeomorfa a ele.

4. Sejam: $X$ o espaço que se obtém da esfera $\mathbb{S}^2$ colando o pólo norte com o pólo sul, $Y = \mathbb{R}^3 - \mathbb{S}^1$ e $Z$ a reunião de um toro de revolução com um disco cujo bordo é o menor dos paralelos do toro. Prove que $X, Y$ e $Z$ tem o mesmo tipo de homotópia.

5. Um subconjunto $Y \subset X$ é um retrato de $X$ se, e somente se,toda aplicação contínua $f : Y \to Z$ admite uma extensão contínua $g : X \to Z$.

6. Prove ou disprove:
   (a) $M \equiv M \times \mathbb{R}^k$ para todo inteiro $k \geq 0$.
   (b) Se $M \equiv N$, existem $p \in M$ e $q \in N$ tais que $M \setminus \{p\} \equiv N \setminus \{q\}$.
   (c) Se $\Sigma_g$ denota a superfície compacta orientável de gênero $g$, então
   $$\Sigma_g \setminus \{p\} \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, ..., p_{2g}\},$$
   para $p \in \Sigma_g$ e $p_1, ..., p_{2g} \in \mathbb{R}^2$ distintos.
   (d) $\mathbb{R}P^{n+1} \setminus \{p\} \equiv \mathbb{R}P^n$, para todo $n \geq 0$.

7. Seja $M$ uma variedade conexa e $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ seu recobrimento duplo orientável. Prove que $\pi^*\colon H^k_{dR}(M) \to H^k_{dR}(\widetilde{M})$ é injetiva para todo $k \geq 0$. Use isso para calcular $H^{top}_{dR}(M)$ no caso em que $M$ não é orientável.

8. Dentre as variedades abaixo calcule os grupos de cohomologia que você conseguir.
   (a) $\mathbb{S}^n \setminus \{p_1, ..., p_k\}$, onde $\{q_1, ..., q_k\}$ representam $k$ pontos distintos, $n, k \geq 0$.
   (b) $\mathbb{R}^n \setminus \{q_1, ..., q_k\}$, onde $\{p_1, ..., p_k\}$ representam $k$ pontos distintos, $n, k \geq 0$.
   (c) $\mathbb{R}P^n \setminus \{r_1, ..., r_k\}$, para $n, k \geq 0$.
   (d) $\Sigma_g \setminus \{s_1, ..., s_k\}$, para $g, k \geq 0$.
   (e) $\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ ($n$ vezes), $n \geq 1$.
   (f) $\mathbb{C}P^n$, $n \geq 0$.
9. Denote por $B^{n+1}$ a bola unitária fechada em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbb{S}^n$ a esfera unitária. Prove os seguintes resultados clássicos.
   (a) $B^{n+1}$ e $\mathbb{S}^n$ não têm o mesmo tipo de homotopia.
   (b) Todo mapa contínuo $F : B^{n+1} \to B^{n+1}$ tem um ponto fixo.
   (c) A antípoda $A\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $x \mapsto -x$, induz a multiplicação por $(-1)^{n+1}$ em $A^*\colon H^n_{dR}(\mathbb{S}^n) \to H^n_{dR}(\mathbb{S}^n)$.
   (d) Existe um campo tangente (contínuo) em $S^n$ que não se anula se, e somente se, $n$ é ímpar.

**Seleção do Spivak**

Fazer os exercícios do livro de M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Diferential Geometry, correspondentes aos capítulos 8 e 11, dando prioridade aos seguintes:

- Capítulo 8, exercícios: 2, 3, 4, 7, 8, 9, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 30, 31, 32.
- Capitulo 11, exercícios: 1, 2, 3, 6, 12.