Análise em Variedades - Agosto/Novembro 2017

Lista 5

1. Prove os seguintes items.

   (a) Uma coleção de 1-formas $\xi_1, ..., \xi_k \in \Omega^1(M)$, são pontualmente linearmente independentes se, e somente se,

   $$\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k(p) \neq 0, \ \forall p \in M.$$

   (b) Uma função $F\colon M \to \mathbb{R}^n$ é uma submersão se, e somente se,

   $$df_1 \wedge \cdots \wedge df_k(p) \neq 0, \ \forall p \in M,$$

   onde $f_1, ..., f_k$ são as componentes de F.

2. Seja $\omega \in \Omega^2(M)$ uma 2-forma não degenerada, ou seja, tal que o mapa

   $$\omega_p^\sharp\colon T_pM \to T_pM^*, \ v \mapsto \omega_p(v, \cdot)$$

   é isomorfimo para todo $p \in M$. Prove que:

   (a) $\dim M = 2n$, para algum inteiro n.

   (b) ω^n é uma forma que não se anula em nunhum $p \in M$.

3. Seja M^n uma variedade sem bordo compacta, orientável, e $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ uma $(n-1)-$forma. Prove que $d\omega$ se anula em algum ponto.

4. (a) Seja $\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Prove que α é fechada mas não é exata.

   (b) Analogamente, seja

   $$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_n \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n).$$

   Prove que $\alpha \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, dada por $\alpha(x) = \frac{1}{|x|^n}\omega(x)$, é fechada mas não exata.

   (c) Calcule a integral de ω sobre o Elipsoide

   $$E := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \sum_i |x_i/a_i|^2 = 1\},$$

   em função de $c_{n-1} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega$.

5. Seja M^n uma variedade diferenciável e $\omega \in \Omega^k(M)$ uma k-forma fechada.

   (a) Se S^k é o bordo de uma subvariedade compacta $B^{k+1} \hookrightarrow M$, então $\int_{S^k} \omega = 0$.

   (b) Se $B^{k+1} \hookrightarrow M$ é uma subvariedade compacta com $\partial B = S \sqcup S'$, então
   $$\int_S \omega = -\int_{S'} \omega,$$
   onde consideramos as orientações induzidas em S e S'.

   (c) Seja $\eta \in \Omega^k(M)$ tal que
   $$\int_\Sigma \eta = 0,$$
   para toda subvariedade $\Sigma \subseteq M$ difeomorfa a $\mathbb{S}^k$. Prove que $d\eta = 0$.

6. Uma forma simplética numa variedade M^n é uma 2-forma fechada e não degenerada $\omega \in \Omega^2(M)$ (veja o exercício 2). Prove que uma forma simplética numa variedade compacta sem bordo não pode ser exata.

7. Calcule:

   (a) Considere as formas
   $$\omega = xydx + 3dy - yzdz,$$
   $$\eta = xdx - yz^2dy + 2xdz$$
   em $\mathbb{R}^3$. Verifique diretamente que $d(d\omega) = 0$ e $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta - \omega \wedge d\eta$.

   (b) Considere a forma
   $$\omega = xydx + 2zdy - ydz,$$
   em $\mathbb{R}^3$. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dado por $f(u, v) = (uv, u^2, 3u + v)$. Calcule $d\omega$ e $f^*\omega$ e $f^*(d\omega)$ e $d(f^*\omega)$ diretamente.

8. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial diferenciável.

   (a) Demostrar que $\omega_F^1(x)(v) := \langle F(x), v\rangle$, define uma $1-$forma em $\mathbb{R}^3$. Ache as coordenadas de ω_F^1 na base $\{dx, dy, dz\}$. Reciprocamente, se ω é uma $1-$forma em $\mathbb{R}^3$, prove que ω determina um único campo G em $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega_G^1 = \omega$.

(b) Demostrar que $\omega_F^2(x)(u,v) := \langle F(x), u \times v\rangle$, define una $2-$forma em $\mathbb{R}^3$. Compute as coordenadas na base $\{dx \wedge dy, dz \wedge dx, dy \wedge dz\}$. Reciprocamente, prove que toda $2-$forma ω define um único campo G em $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega_G^2 = \omega$.

(c) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função suave. Ache a relação entre

i. df e ∇f,

ii. $\nabla \times F$ $d\omega_F^1$,

iii. $\nabla \cdot F$ e $d\omega_F^2$ (identificamos $\Omega^3(\mathbb{R}^3)$ com $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ usando a base $dx \wedge dy \wedge dz$).

Concluir a partir de $d \circ d = 0$, as formulas clássicas: $\nabla \times \nabla = 0$ e $\nabla \cdot \nabla = 0$.