Análise em Variedades - Agosto/Novembro 2017

Lista 4

1. Determine todos os valores de n tal que $\mathbb{R}P^n$ seja orientável.

2. Dadas $f, g \in C^\infty(M)$, e campos tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ prove: $[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$.

3. Provar que os campos vetoriais sobre uma variedade tem estrutura de álgebra de Lie, ou seja: o colchete é $\mathbb{R}$-bilinear, antissimétrico ($[X,Y] = -[Y,X]$) e satisfaz a identidade de Jacobi:
$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \forall \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$
.

4. É verdade que o colchete de Lie é $C^\infty(M)$-bilinear?

5. Construa um atlas orientado de $\mathbb{R}P^3$.

6. Uma variedade M que admite um atlas da forma $A = \{(U,\phi),(V,\psi)\}$ com $U, V, U \cap V$ conexos é orientável? O que acontece se fossem três cartas conexas com interseções dois a dois conexas?

7. Seja $G \times M \to M$ uma ação propriamente descontínua de um grupo numa variedade suave M.
   (a) Prove que a variedade M/G é orientável se e só se existe uma orientação de M que é preservada por todos difeomorfismos de G.
   (b) Use (a) para mostar que o plano projetivo $\mathbb{R}P^2$, e a faixa de Möbius são não-orientáveis.

8. Prove que uma variedade diferenciável M é orientável se, e somente se, existe uma forma de dimensão máxima $\omega \in \Omega^{top}(M)$ tal que para todo $p \in M$, $\omega_p \neq 0$.

9. Prove que o produto de duas variedades $M \times N$ é orientável se, e somente se, ambas M e N são orientáveis.