Lista 3 - Ferramental

Análise em Variedades - IMPA

Rio de Janeiro, 15 de setembro de 2017

Submersões

Problema 1 (Caracterização local das submersões). Seja $\pi\colon M \to N$ um mapa diferenciável e $p \in M$ um ponto fixado. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) $D\pi_p\colon T_pM \to T_{\pi(p)}N$ é sobrejetivo.

(b) Existem cartas coordenadas ao redor de $p \in M$ e $\pi(p) \in N$, nas quais π é uma projeção: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto x$.

(c) Existe uma vizinhança $U \subseteq M$ de $\pi(p)$ e um mapa diferenciável $\sigma\colon U \to M$ tal que $\pi \circ \sigma = id_U$ (seção local).

Problema 2 (Propriedades úteis das submersões sobrejetivas). Seja $\pi\colon M \to N$ uma submersão *sobrejetiva*, então:

(a) Uma função $N \to P$ é diferenciável se, e somente se, $f \circ \pi$ é diferenciável:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f\circ\pi"] & \\ N \arrow[r, "f"] & P. \end{tikzcd}$$

(b) Um subconjunto $Y \subseteq N$ é fechado se, e somente se, $\pi^{-1}(Y) \subseteq M$ é fechado.

(c) Um subconjunto $Y \subseteq N$ é uma subvariedade se, e somente se, $\pi^{-1}(Y) \subseteq M$ é subvariedade (qual sua codimensão?).

Problema 3 (Teorema de Godement)*. Seja M uma variedade e $R \subseteq M \times M$ uma relação de equivalência. Então M/R admite uma estrutura de veriedade diferenciável tal que $\pi\colon M \to M/R$ é uma submersão sobrejetiva se, e somente se,

- $R \subseteq M \times M$ é uma subvariedade fechada na topologia produto.
- A projeção no primeiro fator $\pi_1\colon R \to M$ é uma submersão sobrejetiva.

Além disso, a estrutura diferenciável em M/R é única com essa propriedade.

Problema 4 (Produto Fibrado). Seja $\pi\colon M \to N$ uma submersão e $f\colon P \to N$ um mapa diferenciável:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\pi"] \\ P \arrow[r, "f"] & P. \end{tikzcd}$$

Prove que o produto fibrado

$$P \times_N M := \{(p, m) \in P \times M \mid f(p) = \pi(m)\}$$

é uma subvariedade de $P \times M$.

Transversalidade

Problema 5 (Transversalidade). Uma função $f\colon M \to N$ é dita **transversal** a uma subvariedade $S \subseteq N$ se

$$Df_p(T_pM) + T_{f(p)}S = T_{f(p)}M,$$

para todo $p \in f^{-1}(S)$. Escreve-se $f \pitchfork S$.

Prove que se $f\colon M \to N$ é diferenciável e $f \pitchfork S$, para uma subvariedade $S \subseteq N$, então $f^{-1}(S) \subseteq M$ é uma subvariedade. Qual sua codimensão?

Problema 6 (Produto fibrado geral). Dizemos que dois mapas $f\colon M \to N$ e $g\colon P \to N$ são **transversais** se

$$Df_m(T_mM) + Dg_p(T_pP) = T_{f(m)}N,$$

para todo $m \in M$ e $p \in P$ com $f(m) = g(p)$. Escreve-se $f \pitchfork g$.

Prove que se $f \pitchfork g$, então o produto fibrado

$$P_g \times_f M := \{(p,m) \in P \times M \mid g(p) = f(m)\}$$

é uma subvariedade de $P \times M$.

Fibrados vetoriais

Problema 7 (Fibrados vetoriais). Seja $\pi\colon E \to M$ uma submersão sobrejetiva com uma coleção de mapas

$$\begin{cases} +_p : \pi^{-1}(p) \times \pi^{-1}(p) \to \pi^{-1}(p) \\ \cdot_p : \mathbb{R} \times \pi^{-1}(p) \to \pi^{-1}(p) \end{cases},$$

tais que $(\pi^{-1}(p), +_p, \cdot_p)$ é espaço vetorial para cada $p \in M$. Prove que $(E, M, \pi, +, \cdot)$ é um fibrado vetorial (locamente trivial) se, e somente se,

$$\begin{cases} + : E \times_M E \to E \\ \cdot : \mathbb{R} \times E \to E \end{cases}$$

são mapas diferenciáveis (lembre da definição de produto fibrado no Problema 4).

Problema 8 (Pullback de fibrados). Seja $(E, M, \pi, +, \cdot)$ um fibrado vetorial e $f\colon N \to M$ um mapa diferenciável. Prove que $f^*E := N \times_M E$ herda uma estrutura de fibrado vetorial sobre N. Chamamos esta estrutura de *pullback* $f^*(E, M, \pi, +, \cdot)$.

Problema 9 (Restrição). Seja $(E, M, \pi, +, \cdot)$ um fibrado vetorial e $i\colon N \hookrightarrow M$ um mergulho. Prove que a restrição $E|_N$ e o pullback i^*E são fibrados isomorfos.

Problema 10 (Modulo das seções)*. *Módulos* sobre anéis são a generalização óbvia de espaços vetoriais sobre corpos. Seja $(E, M, \pi, +, \cdot)$ um fibrado vetorial. Prove que o espaço das seções

$$\Gamma(E) := \{\sigma\colon M \to E,\ C^\infty \mid \ \pi \circ \sigma = id_M\},$$

é um módulo sobre o anel das funções diferenciáveis $C^\infty(M)$.

Se E_1 e E_2 são fibrados sobre M isomorfos, prove que $\Gamma(E_1)$ e $\Gamma(E_2)$ são isomorfos como módulos sobre $C^\infty(M)$. A recíproca é verdadeira?

Problema 11 (Seções do pullback). Seja $(E, M, \pi, +, \cdot)$ um fibrado vetorial e $f\colon N \to M$ um mapa diferenciável. Prove que o espaço das seções de E sobre f

$$\Gamma_f(E) := \{\sigma\colon N \to E \ C^\infty \mid \ \pi \circ \sigma = f\}$$

é um módulo sobre $C^\infty(N)$ isomorfo ao módulo das seções do pullback $\Gamma(f^*E)$.

Extra

Problema 12 (Generalização do TFI). Seja $f\colon M \to N$ uma função diferenciável e $K \subseteq M$ uma subvariedade compacta tal que $f|_K$ é injetiva. Suponha que para todo $x \in K$,

$$Df_x\colon T_xM \to T_{f(x)}N$$

é um isomorfismo. Prove que f mapeia uma vizinhança aberta de K em M difeomorficamente numa vizinhança aberta de $f(K)$ em N.

Problema 13 (Exemplos). Dê exemplos:

(a) Uma imersão injetiva que não seja mergulho $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

(b) Uma submersão sobrejetiva $S^3 \to S^2$.

(c) Um mergulho $\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$.

(d) Um difeomorfismo $S^2 \to \mathbb{C}P^1$.