Lista 6, Analisis em Variedades 2016

1. Calcule a cohomologia de De Rham do toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1$.

2. a. Use Mayer-Vietoris para calcular $H^k(M \backslash \{p\})$ em termos de $H^k(M)$, para uma variedade conexa M.

   b. Sejam M, N duas variedades conexas de dimensão n, seja $M\#N$ a soma conexa das variedades (procure em wikipedia se não conhece a definição). Calcule a cohomologia de $M\#N$ em termos da cohomologia de M e N.

   c. Calcule a caracteristica de Euler do toro com g furos: $\underbrace{\mathbb{T}\#...\#\mathbb{T}}_{g-veces}$.

3. Seja M^{2n} uma variedade compacta que admite uma forma simpletica $\omega \in \Omega^2(M)$. Prove que $H^{2k}(M) \neq 0$ para todo $1 \leq k \leq n$ *(Dica: ver lista 4, exercicio 4.)*

4. Seja M^n uma variedade conexa, não orientável de dimensão n. Use o recobrimento duplo orientável para mostrar que $H_c^n(M) = 0$.

5. a. Seja M uma variedade compacta e orientavel de dimensão ímpar. Prove que $\chi(M) = 0$.

   b. Seja M uma variedade compacta e orientavel de dimensão $2m$, para m ímpar. Prove que $H^m(M)$ é par e logo $\chi(M)$ é par.

6. a. Mostre que o espaço vetorial $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N})$ pode ser identificado com o conjunto das sequências de numeros reais. Usando a sequência exata longa do par $(\mathbb{R}^2, \mathbb{N})$, mostre que $H_c^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N})$ pode ser identificado com o conjunto das sequências de numeros reais $\{a_n\}$ tal que $a_n = 0$ para todo n exceto uma quantidade finita.

   b. Seja $PD : H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}) \to H_c^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N})^*$ dado por

$$PD([\eta])([w]) = \int \eta \wedge w.$$

   Descreva PD em termos das interpretações dadas para $H^1(\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{N})$, $H_c^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N})$, e prove que é um ismorfismo.

   c. Claramente $H_c^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N})$ tem uma base enumeravel. Prove que $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N})$ não possui base enumeravel.