Lista 4, Analisis em Variedades 2016

1. Seja M^n uma variedade suave com bordo.

   a. Prove que ∂M tem estrutura de variedade sem bordo, por restrição do atlas de M.

   b. Se M é orientavel prove que ∂M herda uma orientação, induzida por um campo não nulo ao longo do bordo apontando para dentro de M.

2. Seja M^n uma variedade sem bordo compacta, orientavel, e $\eta \in \Omega^{n-1}(M)$ uma $(n-1)$-forma. Prove que $d\eta$ se anula em algum ponto.

3. Seja ω uma 1-forma em M tal que $\int_C \omega = 0$ para toda curva suave fechada C em M. Prove que $\omega = df$ para alguma função suave f *(Dica: suponha que $\omega = df$ e use Stokes para escrever f em termos de $\int_C \omega$).*

4. Seja M uma variedade compacta sem bordo de dimensão $2n$ e $\omega \in \Omega^2(M)$ uma forma simpletica. Prove que não existe $\tau \in \Omega^1(M)$ tal que $\omega = d\tau$ (*Dica: Use o exercicio 2, lista 4 e o exercicio 3.c, 3.d, lista 3*).

5. Seja $\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 - \{0\})$. Prove que α é fechada mas não exata.

6. Sejam M^n, N^m variedades orientadas, e $\omega \in \Omega^n(M)$, $\eta \in \Omega^m(N)$ com soportes compactos. As orientaçoes em M e N induzem uma orientação em $M \times N$; se $v_1, ..., v_n$, $w_1, ..., w_m$ são bases positivas em T_pM, T_qN, então $v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m$ é uma base positiva de $T_{(p,q)}M \times N$. Sejam π_M, π_N as projeções canônicas de $M \times N$ em M e N. Mostre que:

   a.
   $$\int_{M\times N} \pi_M^*\omega \wedge \pi_N^*\eta = \int_M \omega \int_N \eta.$$

   b. Se $h : M \times N \to \mathbb{R}$ é suave, então
   $$\int_{M\times N} h\pi_M^*\omega \wedge \pi_N^*\eta = \int_M g\omega,$$
   onde $g(p) = \int_N h(p, \cdot)\eta$.

7. Seja $\eta \in \Omega^k(M)$ tal que
$$\int_\Sigma \eta = 0,$$
para toda $\Sigma \subset M$ subvariedade orientada e suave difeomorfa a $\mathbb{S}^k$. Prove que $d\eta = 0$