Lista 2, Analisis em Variedades 2016

1. Seja $G(k,n)$ o Grasmmanniano definido na lista 1, problema 2. Mostre que a operaçãon de complemento ortogonal que leva k-planos en $(n-k)$-planos é um difeomorfismo entre $G(k,n)$ e $G(n-k,n)$.

2. Sejam M uma variedade suave, $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial sobre M de posto k, e seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura de M por abertos onde existem trivializações locais $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$. Definimos as funções de transição $\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k)$ por $(p, \phi_{\alpha\beta}(p)(v)) = \phi_\beta \circ (\phi_\alpha)^{-1}(p, v)$.

   a. Mostre que as funções de transição verificam

      (i) $\phi_{\alpha\alpha} = I$, onde $I \in GL(k)$ é a matriz identidade.

      (ii) $\phi_{\beta\alpha} \cdot \phi_{\gamma\beta} \cdot \phi_{\alpha\gamma} = I$ para todo α, β, γ tal que $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$.

   b. Mostre que o fibrado vetorial E pode ser reconstruido a partir das funções de transição. Mais precisamente, mostre que dada qualquer cobertura $\{U_\alpha\}$ de M junto com funções $\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k)$ tais que vale (i) e (ii) então é possivel definir um fibrado vetorial sobre M de posto k tal que as funções de transição são $\phi_{\alpha\beta}$ *(Dica: Considere a união disjunta dos $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ e faça um quociente).*

3. a. Use o problema 2.b para definir o fibrado tangente.

   b. Dado um fibrado vetorial $\pi : E \to M$, use o problema 2.b para definir o fibrado dual E^*. Para cada $p \in M$ a fibra E_p^* deve ser identificavel com o dual de E_p.

4. Seja M uma variedade suave e conexa, para cada $p \in M$ considere o conjunto B das bases de T_pM e defina que duas bases são equivalentes se elas estão relacionadas por uma matriz de determinante positivo. Isto é uma relação de equivalência e divide B em dois conjuntos disjuntos. Seja O_p o espaço quociente de B por esta relação. $O \in O_p$ será chamado uma *orientação* de T_pM. Seja $\tilde{M}$ o conjunto

$$\tilde{M} = \{(p, O) : p \in M, O \in O_p\}.$$

   Seja $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ uma estrutura diferenciavel máximal em M, e defina $\tilde{x}_\alpha : U_\alpha \to \tilde{M}$ por

$$\tilde{x}_\alpha(u_1^\alpha, ..., u_n^\alpha) = (x_\alpha(u_1^\alpha, ..., u_n^\alpha), [\frac{\partial}{\partial u_1^\alpha}, ..., \frac{\partial}{\partial u_n^\alpha}]),$$

onde $[\frac{\partial}{\partial u_1^\alpha}, ..., \frac{\partial}{\partial u_n^\alpha}]$ indica o elemento de O_p determinado pela base ordenada $\{\frac{\partial}{\partial u_1^\alpha}, ..., \frac{\partial}{\partial u_n^\alpha}\}$. Prove que:

a. $\{(U_\alpha, \tilde{x}_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável em $\tilde{M}$ e a variedade $\tilde{M}$ assim obtida é orientável.

b. A função $\pi : \tilde{M} \to M$ dada por $\pi(p, O) = p$ é suave e um recobrimiento duplo (cada ponto possui duas pre-imagens).

c. Prove que $\tilde{M}$ é conexa se e só se M não é orientavel. Em tal caso dizemos que $\tilde{M}$ é o *recobrimento duplo orientável* de M.

5. Determine todos os valores de n tal que $\mathbb{RP}^n$ seja orientavel *(Dica: veja* $\mathbb{RP}^n$ *como o quociente da esfera pela antipodal e determine em que dimensões a atipodal preserva a orientação).*

6. Uma variedade M é paralelizável se o fibrado tangente TM é trivial (i.e. existe um isomorfismo de fibrados vetorias entre TM e $M \times \mathbb{R}^n$). Prove que todo grupo de Lie é paralelizável.