Análise em Variedades - Agosto/Novembro 2014

Lista 5

1. Construa um atlas orientado de $\mathbb{RP}^3$.
2. Uma variedade M que admite um atlas da forma $\mathcal{A} = \{(U, \phi), (V, \psi)\}$ com U, V, $U \cap V$ conexos é orientável. O que acontece se fossem três cartas conexas com interseções dois a dois conexas?
3. Prove que a fita de Moebius não é orientável.
4. Seja $f : M^n \to N^k$ suave, prove que a aplicação induzida: $f^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$ verifica:
   (a) Boa definição (suavidade): dada uma forma suave $\omega \in \Omega(n)$, $f^*\omega$ define uma forma suave em M,
   (b) f^* é morfismo de álgebras (linearidade e compatibilidade com produto $\wedge$),
   (c) Comutatividade respeito da derivada exterior.
5. Mostre que se f é uma submersão sobrejetiva então $f^* : \Omega^\bullet(N) \hookrightarrow \Omega^\bullet(M)$ é um mapa injetivo de álgebras.
6. Sejam $\alpha(t), \beta(t)$ curvas em V, $\mathbb{R}$-espacio vetorial de dimensão finita. Verifique a formula de Leibniz (derivada dum produto) para a derivada usual nos seguintes casos:
   (a) $\alpha \otimes \alpha \in V \otimes V$
   (b) $\alpha \cdot \alpha \in Sym(V)$
   (c) $\alpha \wedge \beta \in \bigwedge^2 V$
7. Seja ω uma k-forma alternada em $\mathbb{R}^n$. Verifica-se $\omega \wedge \omega = 0$? E se $n = 3$?
8. Seja $\omega \in \Omega(M)$ forma diferencial. Defina o *suporte* dela como:
   $$supp(\omega) = \overline{\{p \in M \,|\, \omega_p \neq 0\}}.$$
   Prove:
   $$supp(\omega_1 + \omega_2) \subset supp(\omega_1) \cup supp(\omega_2),$$
   $$supp(\omega_1 \wedge \omega_2) \subset supp(\omega_1) \cap supp(\omega_2)\ .$$
9. Seja U o aberto $(0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ nas coordenadas (ρ, θ, ϕ) no espaço $\mathbb{R}^3$. Defina $F : U \to \mathbb{R}^3$ por
   $$F(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos\phi \sin\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho\cos\theta)$$
   Se x, y, z são as coordenadas da chegada, compute $F^*(dx \wedge dy \wedge dz)$.
10. Dada $\omega \in \Omega^p(M)$ p-forma diferencial, prove a seguinte expressão para a derivada exterior:
    $$\begin{aligned} d\omega_{(X_1, \cdots, X_{p+1})} = \; & \textstyle\sum_i (-1)^{i-1} X_i \; \omega(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_{p+1}) \\ & + \textstyle\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \; \omega([X_i, X_j], X_1, \cdots, \hat{X}_i, \hat{X}_j \cdots, X_{p+1}) \end{aligned}$$
    Dica: Prove primeiro a tensorialidade ($C^\infty(M)$-linearidade) do termo à direita.
11. Uma 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ numa variedade $2n$-dimensional M é dita não-degenerada se o produto $\omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (n-vezes) é não nula em todo ponto de M. Prove que $\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i$ é uma forma não degenerada de $\mathbb{R}^{2n}$.