Análise em Variedades - Agosto/Novembro 2014

Lista 3

1. Usando o atlas dado pelas projeções estereográficas e a identificação usual $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ verifique que $\mathbb{S}^2$ admite um atlas holomorfo de dimensão complexa 1 (transições são funções holomorfas definidas em abertos de $\mathbb{C}$).

   Prove a existência dum difeomorfismo $\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{CP}^1$.

2. Considere o conjunto de matrizes $\{A \in \mathbb{R}^{k\times n} |\ \text{posto}(A) = k\}$, $k \leq n$, e defina uma relação de equivalência dada por

$$A \sim B \iff \mathbb{R}^k \cdot A = \mathbb{R}^k \cdot B \subset \mathbb{R}^n.$$

   O espaço quociente é o conjunto de k-planos em $\mathbb{R}^n$ chamado de Grassmanniana (k, n),

$$Gr_{\mathbb{R}}(k, n) = \{span < v_1, \ldots, v_k > |\ \{v_i\}_i \text{ linearmente independentes}\}.$$

   (a) Prove que $Gr_{\mathbb{R}}(k, n)$ é um espaço compacto.

   (b) Prove que este espaço é uma variedade suave.

   (c) Estenda a construção a subespaços de dimensão complexa k em $\mathbb{C}^n$. Qual é a dimensão real de $Gr_{\mathbb{C}}(k, n)$?

3. Dado um grupo de Lie linear $G \subset \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(n)$ (ou $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(n)$), determine as equações lineares que definem o plano tangente na identidade $\mathrm{T}_{Id}\, G$ para $G = \mathrm{SO}(n), \mathrm{O}(n), \mathrm{SL}(n), \mathrm{SU}(n), \mathrm{U}(n)$.

4. Dado um polinômio homogêneo $P \in \mathbb{R}_d[X_0, \ldots, X_n]$, $P(t.x_o, \ldots, t.x_n) = t^d.P(x_1, \ldots, x_n)$ e tal que as derivadas parciais $\partial P/\partial X_i$ não se anulam simultaneamente, prove que o subconjunto:

$$\{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{RP}^n |\ P(x_0, \cdots, x_n) = 0\} \subseteq \mathbb{RP}^n$$

   é uma subvariedade regular.

5. Determine quais das equações a seguir definem uma subvariedade regular e, caso contrário, identifique os pontos críticos.

   (a) $y^2 = x^4$ em $\mathbb{R}^2$,

   (b) $x^3 + y^3 + z^3 = 1,\ z = xy$ em $\mathbb{R}^3$,

   (c) $xz = y\ y^2 = x^2(x + 1)$ em $\mathbb{R}^3$.

6. Seja (G, μ, ι) um grupo de Lie com a multiplicação $\mu : G \times G \to G$ e inversa $\iota : G \to G$, verifique:

$$\mu_{*(e,e)}(X_e, Y_e) = X_e + Y_e$$
$$\iota_{*(e)}(X_e) = -X_e.$$

7. Prove que todo grupo de Lie é paralelizável, i.e., seu fibrado tangente é trivial.

$$TG^n \cong G \times \mathbb{R}^n.$$

8. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ o mapa dado por $(u, v, w) = F(x, y) = (x, y, xy)$. Compute $F_*(\partial/\partial x|_p)$, para $p \in \mathbb{R}^3$, como combinação linear de $\partial/\partial u$, $\partial/\partial v$ e $\partial/\partial w$ em $F(p)$.

9. Seja $f : M \to N$ um mapa continuo tal que sua imagem esta contida numa subvariedade regular $S \subset N$. Prove que f é suave respeito do atlas de subvariedade de S se e só se f é suave como mapa em N.