Análise em Variedades - Agosto/Novembro 2014

Lista 2

1. Defina um atlas de $\mathbb{S}^n$ dado pelas projeções estereográficas $\mathbb{S}^n \backslash \{(0,\ldots,0,\pm 1)\} \to \mathbb{R}^n$, e outro atlas dado pelas projeções cartesianas $(x_1,\ldots,x_{n+1}) \to (x_1,\ldots,\hat{x_k},\ldots,x_{n+1})$ (convenientemente restritas). Prove a compatibilidade destes atlas.

2. Considere $\mathbb{R}$ com uma carta dada por $c : x \to x^3$. Prove que $(\mathbb{R}, c)$ é uma variedade diferenciável diferente da usual (em tanto tem atlas incompatível). Prove que $(\mathbb{R}, c)$ e $(\mathbb{R}, Id)$ são variedades difeomorfas.

3. Prove que os seguinte subconjuntos são subvariedades regulares:
   (a) $\mathrm{SO}(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{SU}(n) \subset \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $\mathrm{Sp}(n) \subset \mathbb{R}^{4n\times 4n}$.
   (b) $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{SL}(n) \subset \mathrm{GL}(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ (quaisquer tomados de a dois).
   (c) $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid posto(A) \geq k\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$
   (d) O gráfico duma função suave $Gr_f = \{(x, f(x)\} \subset M \times N$.
   (e) $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$
   (f) $\mathbb{RP}^k \subset \mathbb{RP}^{k+1}$.

4. De uma estrutura de variedade diferenciável aos espaços projetivos reais, complexos ou quaterniônicos: $\mathbb{RP}^n, \mathbb{CP}^n, \mathbb{HP}^n$.

   Extra: Os números de Cayley, também chamados de octoniones, definem uma estrutura de álgebra de divisão com unidade em $\mathbb{R}^8$, embora a multiplicação não seja associativa. Assim, analogamente se define o plano projetivo $Ca\mathbb{P}^2$, com estrutura de variedade diferenciável de dimensão 15.

5. Verifique:
   (a) Seja $p : X \to X/\sim$ a projeção ao quociente induzida por uma relação dada. Prove que p é uma aplicação aberta se e somente se $p^{-1}(p(\mathcal{U})) \subset X$ é aberto em X para todo aberto $\mathcal{U} \subset X$. Em tal caso a relação se diz aberta.
   (b) Dada uma relação aberta, prove que a propriedade de $X/\sim$ ser Hausdorff é equivalente ao gráfico da relação $Gr_\sim = \{(x, x') \in X \times X | x \sim x'\} \subset X \times X$ ser um subconjunto fechado.
   (c) Dada uma relação aberta, prove que uma base de entornos dum ponto $x \in X$ se projeta numa base de entornos de $[x] \in X/\sim$. Conclua que se X admite base numerável da topologia então $X/\sim$ tem a mesma propriedade.

6. Prove que o quociente duma variedade M pela ação propriamente descontinua dum grupo F herda naturalmente uma estrutura de variedade suave que faz da projeção $M \to M/F$ uma difeomorfismo local.

7. Prove que o toro $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ é difeomorfo ao quociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

8. Prove que o grupo de difeomorfismos duma variedade suave conexa $Diff(M)$ age transitivamente em M.

9. Prove que a única variedade conexa compacta de dimensão 1 é $\mathbb{S}^1$.

10. Considere a função $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ dada por restrição de $f(x, y, z) = (yz + xz + x^2)$.
    (a) Prove que f induz uma função suave $\tilde{f} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}$.
    (b) Escolha um atlas e compute a expressão local de $\tilde{f}$ perto de $[1 : 0 : 0] \in \mathbb{RP}^2$.