Lista 12, Analise em variedades

Diego N. Guajardo

7 de dezembro de 2020

Sempre M, N vaõ ser variedades suaves($= C^\infty$), as vezes vamos denotar M^n para $n = \dim M$. Se achar que é necessario, pode assumir que as variedades são conexas. Podem ser uteis os teoremas 5.27, 5.29 do Lee para simplificar que alguns mapas sao suaves, podem usar sem provar. $\mathfrak{X}(M)$ denota os campos vetorias sobre M.

1. Seja $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada compacta e conexa. Mostrar que o widing number da componente não limitada é zero.

2. Mostrar que como anel, $H^*_{dR}(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{R}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$, onde α é um elemento não zero de $H^2_{dR}(\mathbb{C}P^n)$.

   Dica: Indução, repare que dá para incluir naturalmente $i : \mathbb{C}P^{n-1} \to \mathbb{C}P^n$ e que essa inclusão envia o gerador no gerador. Pode ser útil a dualidade de Poincaré.

   Comentário: este exercicio tem mais informação do que simplesmente conhecer a dimensão das cohomologias, como vemos no proximo exericicio.

3. Mostre que $\dim(H^k_{dR}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4)) = \dim(H^k_{dR}(\mathbb{C}P^3))$, $\forall k$ mas não são variedades difeomorfas.

   Dica: Use o teorema de Künneth para estudar a cohomologia da variedade produto. Mostre que os aneis de cohomologia tem estrutura diferente. Use o exercício 2

4. Suponha que M de tipo finito e N arbitraria. Mostre o teorema de Künneth para estas variedades.

   Dica: Tente fazer uma indução imitando uma prova como na dualidade de Poincaré, se for válido para $U, V, U \cap V$ então é válido para $U \cup V$

   Comentário: O teorema de Künneth foi enunciado no exercicio 5 da lista 9. Variedades de tipo finito foram definidas no exercício 5 da lista 11.

   Comentário: Tem variedades malucas onde não é válido. Existe uma versão mais complexa do teorema de Künneth que é valido para todas as variedades.

5. (Versão fraca da dualidade de Poincare) Suponha que $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é uma variedade riemanniana compacta orientada, mostre que $* : \mathcal{H}^k(M) \to \mathcal{H}^{n-k}(M)$ está bem definido (envia formas harmonicas em formas harmonicas) e é de fato uma bijeção. Assumindo o teorema de Hodge, conclua que $H^k_{dR}(M)$ e $H^{n-k}_{dR}(M)$ são isomorfos.

   Comentário: A definição de forma harmonica está no exercicio 9 da lista 9

   Comentário: A dualidade de Poincare dá uma bijeção livre de escolhas (salvo orientação) entre H^k e $(H^{n-k})^*$, aqui a gente encontrou um isomorfismo que depende de escolha (a métrica), entre H^k e H^{n-k}.

6. (Cobordismo) Suponha que $M^n = \partial B$ é o bordo de uma variedade compacta B. Mostre que:

   (a) $[\chi(M)] = 0 \in \mathbb{F}_2$ (isto é, a caracteristica de Euler é sempre par). Conclua que $\chi_n : \Omega_n \to \mathbb{F}_2$, $\chi_n([N]) = [\chi(N)]$ está bem definido e é um homomorfismo de grupos.

   (b) Mostre que $[\mathbb{R}P^2] \in \Omega_2$ não é trivial.

   Comentário: Pode ver a definição de cobordismo no exercício 8 da lista 7.

   Comentário: Dá para provar que $\Omega_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, assim $[\mathbb{R}P^2]$ é o único elemento não trivial.

7. (Cobordismo parte 2) Mostre que o mapa $\chi : \Omega_* \to \mathbb{F}_2[x]$ dado por, $\chi([N^n]) = [\chi(N)]x^n$ define um homomorfismo de aneis graduados. Conclua que $[(\mathbb{R}P^2)^k] \in \Omega_{2k}$ é não trivial.

   Dica: Assuma a fórmula de Künnet para mostrar que $\chi(M \times N) = \chi(M)\chi(N)$.

   Comentário: Não é muito dificil mostrar que a caracterisitca de Euler de $\mathbb{R}P^{2l}$ é impar, e por um argumento análogo dá para provar que o produto de espaços projetivos com dimensão par define uma classe de cobordismo não trivial, por exemplo $0 \neq [\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^4 \times \mathbb{R}P^{10}] \in \Omega_{16}$

8. (Teoria da interseção) Suponha M compacta, $f : M \to P$ transveral a $N \subseteq P$ uma subariedade fehcada com $\dim(M) + \dim(N) = \dim(P)$ (todas variedades sem bordo). Deinimos o número de interseção de f módulo 2, $I_2(f, N)$ como o número de pontos em $f^{-1}(N)$ módulo 2. Mostre que:

   (a) Se $f, g : M \to P$ transversais a N e suponha que existe uma homotopia $H : M \times I \to P$ entre f, g que é transversal a N. Mostrar que $I_2(f, N) = I_2(g, N)$

   (b) Mostre que $\mathbb{S}^1 \times \{(1, 0)\}, \{(1, 0)\} \times \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, nao podem ser separados, sempre se intersetam.

   (c) Veja que quando $\dim(M) = \dim(P)$ e $N = \{p\}$, podemos definir o grau módulo 2 $\deg_2(f) = I_2(f, \{p\})$ e que este valor não depende de p.

   Comentário: Veja como a teoria da interseção generaliza a teoria do grau. Dá para fazer uma teoria de interseção orientada.

   Comentário: A teoria da interseção módulo 2 permite estudar fenomenos não orientáveis.

9. Suponha M, N compactas conexas orientadas e da mesma dim. Seja $f : M \to N$ com grau zero. Provar que $f^* : H^*(N) \to H^*(M)$ é injetiva.