Lista 11, Analise em variedades

Diego N. Guajardo

7 de dezembro de 2020

Sempre M, N vaõ ser variedades suaves($= C^\infty$), as vezes vamos denotar M^n para $n = \dim M$. Se achar que é necessario, pode assumir que as variedades são conexas. Podem ser uteis os teoremas 5.27, 5.29 do Lee para simplificar que alguns mapas sao suaves, podem usar sem provar. $\mathfrak{X}(M)$ denota os campos vetorias sobre M.

1. Sejam $p, q, r \in \mathbb{R}^n$ com $n \geq 2$ e $M = \mathbb{R}^n \setminus \{p, q, r\}$. Calcular $H^k_{dR}(M)$.
2. Calcule $H^k_c(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$
3. Suponha que (V, ω) é um espaço vetorial com uma 2-forma não degenerada, mostrar que:
   (a) Existe uma base $x_1, y_2 \ldots, x_n, y_n$ de V tal que $\omega(x_i, y_i) = 1$ e todas as combinações restantes são zero. Conclua que ω^n é um elemento de volume.
   (b) Seja (M^{2n}, ω) uma variedade simplética compacta, mostre que ω^n define uma forma de volume.
   (c) Suponha M compacta e sem bordo. Mostre que $0 \neq [\omega]^k \in H^{2k}(M)$ para todo $k = 1, \ldots, n$.
   (d) Conclua que $\mathbb{S}^n$ é simplética se e somente se, $n = 2$.

   Dica para (a): usar indução em n. Repare que da para tomar uma espacie de "ortogonal simplético".
4. Mostre que
$$H^k_{dR}(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & 0 \leq k = 2l \leq 2n \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$$
   Comentário: Dá para provar que $\mathbb{C}P^n$ é uma variedade simplética, pelo exercício 3 é de algúm modo a variedade compacta e simplética mais simples de todas.
5. Dizemos que uma cobertura por abertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de M^n é dita boa se para qualquer interseção finita $U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_k}$ é vazia ou difeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Uma variedade é dita de tipo finito se existe uma cobertura boa e finita. Mostre que se M^n é de tipo finito, então $\dim(H^k_{dR}(M)) < \infty$ para todo k.

   Dica: Defina $M_N = \bigcup_{i=1}^N U_i$ e mostre por indução em N.

   Comentário: Toda variedade compacta é de tipo finito. Dá para provar usando geometria riemanniana chamando U_i uma cobertura por bolas (geodesicamente) convexas. A interseção de bolas convexas é convexa.
6. Suponha que M, N são variedades compactas com bordo $\partial M = P = \partial N$. Mostre que:
$$\chi(M \cup_{id} N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(P)$$
   Comentario: Veja o exercicio 7 da lista 7 para as definições dos objetos deste exercício. Dá para provar para variedades de tipo finito, veja o exercício 5.
7. Seja M^n conexa com $n > 2$, mostrar que $i^* : H^k_{dR}(M) \to H^k_{dR}(M \setminus \{p\})$ para $0 \leq k \leq n-2$ é um isomorfismo. Mostrar que também é válido para $k = n-1$ se M é compacta orientada.
8. Sejam M_1^n, M_2^n conexas com $n > 2$. Mostrar que $H^k_{dR}(M_1 \# M_2) \cong H^k_{dR}(M_1) \oplus H^k_{dR}(M_2)$ para $0 < k < n-1$ e que também é válido para $n-1$ se ambas são compactas e orientáveis.
9. Mostre que:
   (a) Suponha que M, N são variedades compactas sem bordo. Mostrar que:
$$\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(\mathbb{S}^n)$$
   (b) Calcule a característica de Euler do toro com "g buracos", $\Sigma_g := \mathbb{T}^2 \# \ldots \# \mathbb{T}^2$, a soma conexa de g toros.

   Comentario: Veja o exercicio 7 da lista 7 para as definições dos objetos deste exercício. Dá para provar para variedades de tipo finito, veja o exercício 5.