Lista 10, Analise em variedades

Diego N. Guajardo

7 de dezembro de 2020

Sempre M, N vaõ ser variedades suaves($= C^\infty$), as vezes vamos denotar M^n para $n = \dim M$. Se achar que é necessario, pode assumir que as variedades são conexas. Podem ser uteis os teoremas 5.27, 5.29 do Lee para simplificar que alguns mapas sao suaves, podem usar sem provar. $\mathfrak{X}(M)$ denota os campos vetorias sobre M.

1. (Propriedades do grau) Sejam M, N, P variedades compactas e orientadas. Mostrar que:
   (a) Se $f_1, f_2 : M \to N$ são homotópicos, então $\deg(f_1) = \deg(f_2)$.
   (b) Se $f : M \to N$ e $g : N \to P$ suaves, então $\deg(g \circ f) = \deg(g)\deg(f)$.
   (c) $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ possui grau zero se não for sobrejetiva.
2. Considere $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$ suave. Mostrar que existe $x_0 \in \mathbb{S}^{2n}$ tal que $f(x_0) = x_0$ ou $f(x_0) = -x_0$. Conclua que todo mapa $\hat{f} : \mathbb{R}P^{2n} \to \mathbb{R}P^{2n}$ possui um ponto fixo.
3. Vamos mostrar o Teorema fundamental da algebra usando geometria.
   (a) Se $p \in \mathbb{C}[z]$ um polinomio, mostrar que existe uma única funçao suave $P : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ tal que:
   $$P([z:1]) = [p(z):1] \quad \text{(extensão de } p\text{)}$$
   (b) Seja $P_n : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ o mapa associado ao polinomio $p_n(z) = z^n$. Mostrar que $\deg(P_n) = n$
   (c) Seja $q \in \mathbb{C}[z]$ um polinomio de grau n e $Q : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ o mapa associado. Mostrar que Q e P_n são homotópicos. Conclua que $\deg(Q) = n$.
   (d) Conclua que q possui um zero, isto é, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $q(z_0) = 0$.
4. Seja N o polo norte de $\mathbb{S}^n$, M^n uma variedade compacta orientada e $m \in \mathbb{Z}$. Asuma que existe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$ suave, que envia difeomorficamente a bola unitária $B_1(0)$ em $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ e o complementar da bola unitária é enviada no polo norte N, $f(B_1(0)^c) = \{N\}$ (dá para construir usando bump functions). Construa $F : M^n \to \mathbb{S}^n$ tal que $\deg(F) = m$.

   Comentário: Dá para mostrar que $F, G : M^n \to \mathbb{S}^n$ são homotópicos se, e somente se, $\deg(F) = \deg(G)$ (Teorema de Hopf).
5. (Five lemma) Considere o seguinte diagrama comutativo (todos são espaços vetoriais e todos são mapas lineares):

   $$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_A"] & B_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_B"'] & C_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f_C"] & D_1 \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_D"] & E_1 \arrow[d, "f_E"] \\ A_2 \arrow[r, "r"] & B_2 \arrow[r, "s"] & C_2 \arrow[r, "t"] & D_2 \arrow[r, "u"] & E_2 \end{tikzcd}$$

   Suponha exatidão na direção horizontal nas duas filas (isto é, $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$, $\mathrm{Im}(g) = \ker(h)$, etc). Suponha que f_A, f_B, f_D, f_E são isomorfismos. Mostre que f_C é um isomorfismo.

   Comentário: é frequentemente usado quando $A_i = E_i = 0$, para sequencias exatas curtas.
6. $\mathcal{C} = (C_n, \partial_n)$ é dita um complexo de cadeias, se C_n é um espaço vetorial (real), $\partial = \partial_n : C_n \to C_{n-1}$ e $\partial^2 = \partial_n \partial_{n-1} = 0$. Chamamos a n-ésima **homologia de** $\mathcal{C}$ e denotamos $H_n(\mathcal{C}) = \dfrac{\ker(\partial_n)}{\mathrm{Im}(\partial_{n+1})}$. Os conceitos de exatidão, sequencia curta, etc, se generalizam analogamente. Mostre que:
   (a) $\mathcal{C}^* = (C_n^*, d_n = (\partial_{n+1})^*)$ define um complexo de cocadeias.

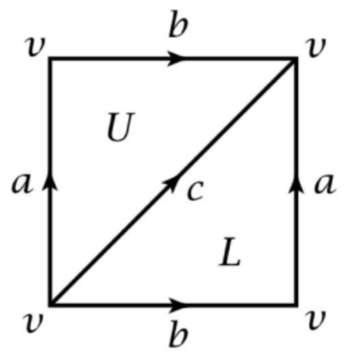

Figura 1: Um toro, veja que as curvas dos bordos estao identificadas como no quociente que define num toro, tem uma terceira curva que divide o toro em dois triangulos

(b) Considere a figura 1, que representa um toro:
U, V representam as caras dos triângulos que subdividem o toro, a, b, c representam tres curvas e v é um ponto do toro. Considere os espaços vetoriais: C_2 cuja base é dade formalmente por $\{U, V\}$, C_1 cuja base formalmente é dada por $\{a, b, c\}$, C_0 cuja base formalmente é dada por $\{v\}$ e $C_n = 0$ para todo $n \neq 0, 1, 2$. Defina o operador **bordo** como o operador linear $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ por $\partial_n = 0$ se $n \neq 2$, e definido nos elementos das bases $\partial_2(U) = c - b - a$, $\partial_2(L) = a - c + b$. Mostre que isto define uma cadeia de complexos e calcular as dimensões das homologias.

Comentário: Veja que as bases das homologias induzidas podem ser pensadas como subvariedades do toro. Isto é o que se chama homologia em topologia algébrica, conseguir representar algébricamente fenomenos topologicos ou subvariedades que dizem informação respeito nossa variedade. Para quem tiver interesse recomendo ver Δ-complexos no Hatcher, este é um exemplo disso.

7. Sejam $\mathcal{A}^i, \mathcal{B}^i, \mathcal{C}^i$ $(i = 1, 2)$ complexos de co-cadeias e mapas entre co-cadeias tais que os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}^1 & \xrightarrow{i^1} & \mathcal{B}^1 & \xrightarrow{j^1} & \mathcal{C}^1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_A} & & \downarrow{\scriptstyle f_B} & & \downarrow{\scriptstyle f_C} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}^2 & \xrightarrow{i^2} & \mathcal{B}^2 & \xrightarrow{j^2} & \mathcal{C}^2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Mostrar que o seguinte mapa comuta:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \dots & \longrightarrow & H^{n-1}(\mathcal{C}^1) & \xrightarrow{\delta} & H^n(\mathcal{A}^1) & \xrightarrow{i^1} & H^n(\mathcal{B}^1) & \xrightarrow{j^1} & H^n(\mathcal{C}^1) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(\mathcal{A}^1) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_C} & & \downarrow{\scriptstyle f_A} & & \downarrow{\scriptstyle f_B} & & \downarrow{\scriptstyle f_C} & & \downarrow{\scriptstyle f_A} & & \\ \dots & \longrightarrow & H^{n-1}(\mathcal{C}^2) & \xrightarrow{\delta} & H^n(\mathcal{A}^2) & \xrightarrow{i^1} & H^n(\mathcal{B}^2) & \xrightarrow{j^1} & H^n(\mathcal{C}^2) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(\mathcal{A}^2) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Onde estamos abusando de notação ao denotar pelo mesmo nome os mapas nas cadeias e nas cohomologias.

8. Sejam $\mathcal{A} = (A_n, d_{\mathcal{A}}), \mathcal{B} = (B_n, d_{\mathcal{B}})$ dois complexos de cocadeias, considere $C_n = \bigoplus_{k=0}^n (A_k \otimes B_{n-k})$, definimos $d_{\mathcal{C}} = d_n : C_n \to C_{n+1}$ por:

$$d_{\mathcal{C}}(a_k \otimes b_{n-k}) = d_{\mathcal{A}}(a_k) \otimes b_{n-k} + (-1)^k a_k \otimes d_{\mathcal{B}}(b_{n-k+1})$$

Para $a_k \in A_k$ e $b_{n-k} \in B_{n-k}$ e estendido linearmente. Demostre que $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ é um complexo de cocadeias.

Comentário: $\mathcal{C}$ é usualmente denotado $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

Comentário: O teorema de Künneth relaciona as cohomologias do complexo $\mathcal{C}$ com as de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. As vezes temos que $H^n(\mathcal{C}) \cong \bigoplus_{k=0}^n (H^k(\mathcal{A}) \otimes H^{n-k}(\mathcal{B}))$, que pode ser interpretado geometricamente como a fórmula de Künneth do exercício 5 da lista 9.