Lista 9, Analise em variedades

Diego N. Guajardo

7 de dezembro de 2020

Sempre M, N vaõ ser variedades suaves($= C^\infty$), as vezes vamos denotar M^n para $n = \dim M$. Se achar que é necessario, pode assumir que as variedades são conexas. Podem ser uteis os teoremas 5.27, 5.29 do Lee para simplificar que alguns mapas sao suaves, podem usar sem provar. $\mathfrak{X}(M)$ denota os campos vetorias sobre M.

1. Mostre que as seguintes variedades são homotopicamente equivalentes
   (a) $\mathbb{R}^n$ e um ponto $\{p\}$
   (b) $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{S}^n$
   (c) $\mathbb{K}P^n \setminus \{p\}$ e $\mathbb{K}P^{n-1}$ (espaços projetivos para $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$)
   (d) E com M onde E é um fibrado vetorial sobre M

   Comentário: Veja que a equivalência homotópica é muito mais fraca do que difeomorfismo, pois podemos "diminuir"a dimensão das variedades.

   Comentário: O parte (d) mostra que a cohomologia de de Rham não consegue distinguir fibrados vetoriais. A teoria de classes características permite associar, a cada fibrado, cohomologias de de Rham na base. Desta forma, os distinguir e estudar propriedades interessantes que cada fibrado possua.

2. Sejam $\{M_i\}_{i\in I}$ variedades diferenciais sem bordo (com I enumerável e todas da mesma dimensão) e $M = \bigsqcup_{i\in I} M_i$, a união disjunta das variedades. Mostre que:
$$H^\bullet_{dR}(M) \cong \prod_{i=1}^{\infty} H^\bullet_{dR}(M_i)$$
   Como álgebras graduadas.

3. A cohomologia de de Rham com suporte compacto é um invariante homotópico?

4. Considere M^n compacta orientada sem bordo e mostre que:
   (a) O operador $I = I_{k,n-k} : \Omega^k(M) \times \Omega^{n-k}(M) \to \mathbb{R}$ dado por:
$$I(\omega, \eta) = \int_M \omega \wedge \eta$$
   induz um mapa bilinear $I : H^k_{dR}(M) \times H^{n-k}_{dR}(M) \to \mathbb{R}$ (denotamos I por abuso de notação)
   (b) O operador induzido na cohomologia de de Rham é bilinear e simétrico se $n = 4l$ e $k = 2l$ para algum l.

   Comentário: Lembrando que o sinal de um mapa bilinear é a diferença entre a dimensão do maior subespaço V positivo ($I|_{V\times V} > 0$) menos a dimensão do maior subespaço negativo (se o espaço possui uma métrica, isto coincide com a diferença do numero de autovalores positivios com o numero de autovalores negativos do mapa autoadjunto induzido). Assim, definimos o **sinal** de M^{4l} como o sinal de $I = I_{2l,2l}$, e I é um invariante topologico importante.

5. (Fórmula de Künneth) Sejam M^m e N^n, o objetivo deste exercício é relacionar as cohomologias de M, N com as de $M \times N$. Considere $\kappa : \Omega^k(M) \times \Omega^l(N) \to \Omega^{k+l}(M \times N)$ dado por $\kappa(\omega, \eta) = \pi_1^*\omega \wedge \pi_2^*\eta =: \omega \wedge \eta$ (abuso de notação). Mostre que κ induz um mapa
$$\kappa : H^k(M) \otimes H^l(N) \to H^{k+l}(M \times N)$$
   E assim um mapa $\kappa = \kappa_r : \bigoplus_{k+l=r} H^k(M) \otimes H^l(N) \to H^r(M \times N)$.

   Comentário: O teorema de Künneth diz que, sob hipoteses simples adicionais nas varieades, o ultimo mapa é um isomorfismo. Ainda mais forte:
$$\kappa = \bigoplus_r \kappa_r : H^\bullet(M) \otimes H^\bullet(N) := \bigoplus_{r\geq 0} \bigoplus_{k+l=r} H^k(M) \otimes H^l(N) \to H^\bullet(M \times N)$$
   É um isomorfismo de álgebras graduadas. Talvez provaremos isso nas proximas listas.

6. (Bola cabeluda) Suponha que $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$ é um campo tal que $X_p \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{S}^n$. Mostre que:

   (a) Verifique que $A^* : H^n_{dR}(\mathbb{S}^n) \to H^n_{dR}(\mathbb{S}^n)$ é dado por $A^*[\omega] = (-1)^{n+1}[\omega]$

   (b) O mapa antipodal $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $A(x) = -x$ é homotópico ao mapa identidade $I(x) = x$.

   (c) Conclua que n é impar. (Lembrar que sabemos algo a respeito de mapas homotopicos).

   Dica: Usando o vetor X, podemos definir um caminho: primeiro de p até X e depois de X até $-p$. As homotopias podem ser pensadas como caminhos desde $f(x)$ ate $g(x)$ para todo x. Não precisam se preocupar pela suavidade.

   Comentário: Este exercício mostra em particular que $T\mathbb{S}^{2n} \not\cong \mathbb{S}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ como fibrados.

7. Considere M^n uma variedade conexa não orientável. Defina $\hat{M}$ o recobrimento duplo orientado, isto é:

$$\hat{M} = \{(p, O_p) : p \in M, O_p \text{ orientação de } T_pM\}$$

   Mostrar que:

   (a) $\hat{M}$ é uma variedade orientável.
   (Lembrar, uma carta φ de M induz duas cartas em $\hat{M}$, $\hat{\varphi}_1(x, O_x) = (\varphi(x), [\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}])$ e a carta $\hat{\varphi}_2(x, -O_x) = (\varphi(x), -[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}]))$

   (b) $\phi : \hat{M} \to \hat{M}$ dado por $\phi(p, O_p) = (p, -O_p)$ é um difeomorfismo e $\pi : \hat{M} \to M$ é um difeomorfismo local 2 a 1.

   (c) Mostrar que $\hat{\omega} \in \Omega^k(M)$ é da forma $\hat{\omega} = \pi^*\omega$ para alguma $\omega \in \Omega^k(M)$ se e somente se, $\phi^*(\hat{\omega}) = \hat{\omega}$

   (d) Mostre que $H^n_c(M^n) = 0$.

   (e) Mostrar que $\mathbb{R}P^2$ não é homotópico a nenhuma superficie compacta orientável.

8. Neste exercício vamos tentar analizar a cohomologia de de Rham de um grupo de Lie analizando sua álgebra de Lie.

   (a) Mostre que $\Omega^\bullet(G)^L \subseteq \Omega^\bullet(G)$ é um subcomplexo, isto é, $d(\Omega^\bullet(G)^L) \subseteq \Omega^\bullet(G)^L$

   (b) Considere $Z^k(M)^L \subseteq Z^k(G)$ e $B^k(M)^L \subseteq B^k(G)$ as formas que são invariantes pela esquerda. Defina:

$$H^k_{dR}(G)^L = \frac{Z^k(G)^L}{B^k(G)^L}$$

   Mostre que $i : \Omega^k(G)^L \to \Omega^k(G)$ a inclusão induz um mapa $i : H^k_{dR}(G)^L \to H^k_{dR}(G)$.

   (c) Suponha que G é compacto. Mostrar que o mapa M do exercício 6 da lista 8 também induz um mapa $M : H^k_{dR}(G) \to H^k_{dR}(G)^L$ e verifique que $M \circ i = I$. Em particular i é injetivo.

   Comentário: Dá para provar que i é bijetivo quando G é compacto.

   Comentário: Veja que o exercício 3 da lista 6 e a formula do exercicio 9 da lista 7, permite levar a cohomologia $H(G)^L$ em termos puramente algébricos. De fato, dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, defina $C^k(\eth) = \bigwedge^k \mathfrak{g}^*$ e $d = d^k : C^k(\mathfrak{g}) \to C^{k+1}(\mathfrak{g})$ por $(d\sigma)(X_0, \ldots, X_k) = \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \sigma([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_k)$. Temos que $d \circ d = 0$ e chamamos de **Cohomologia de Chevalley–Eilenberg** por:

$$H^k(\mathfrak{g}) = H^k(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = \frac{\ker(d^k)}{\mathrm{Im}(d^{k-1})}$$

   Pelo anterior, quando $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de um grupo de Lie, $H^k(\mathfrak{g}) \cong H^k_{dR}(G)^L$

9. Considere $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade riemanniana compacta orientada. Definimos o operador de **Laplace-Beltrani**, por $\Delta : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$ por $\Delta = dd^* + d^*d$. Dizemos que ω é harmonica se $\Delta\omega = 0$ e denotamos por $\mathcal{H}^k(M)$ o conjunto das $k-$formas harmonicas. Mostre que:

   (a) $\Delta = (d + d^*)^2$ (consegimos escrever o operador laplaciano como o quadrado de um operador!)

   (b) Veja que ω é harmonica se e somente se $d\omega = 0$ e $d^*\omega = 0$. Em particular está bem definido o mapa $i : \mathcal{H}^k(M) \to H^k_{dR}(M)$, $i(\omega) = [\omega]$.

   Comentário: Existe um teorema muito importante chamado o teorema de Hodge, que diz que o mapa $i : \mathcal{H}^k(M) \to H^k_{dR}(M)$ é isomorfismo. Também é chamado teorema de Hodge uma versão complexa deste resultado.