Lista 8, Analise em variedades

Diego N. Guajardo

7 de dezembro de 2020

Sempre M, N vaõ ser variedades suaves($= C^\infty$), as vezes vamos denotar M^n para $n = \dim M$. Se achar que é necessario, pode assumir que as variedades são conexas. Podem ser uteis os teoremas 5.27, 5.29 do Lee para simplificar que alguns mapas sao suaves, podem usar sem provar. $\mathfrak{X}(M)$ denota os campos vetorias sobre M. (A imagem é do google, nao fui eu que fiz).

1. Assumindo o teorema de Stokes visto em aula, mostre o teorema clássico de Stokes para superficies em $\mathbb{R}^3$, o teorema da divergência e o teorema de Green (de integrar no plano).

2. Seja $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^4$ com a orientação produto e $\omega = xyzdw \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$. Calcular $\int_{\mathbb{T}^2} \omega$.

3. Considere $M = \mathbb{R}^n$. Dizemos que $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ é "SURPREENDENTE", se para γ um caminho suave $\int_\gamma \omega$ não depende de γ e só depende dos pontos extremos, isto é, se $\hat{\gamma}$ é outra curva com os mesmos extremos então $\int_\gamma \omega = \int_{\hat{\gamma}} \omega$. Em particular, toda curva fechada integra zero. Mostrar que:

   (a) $\eta = dg$ para $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é "SURPREENDENTE"

   (b) Suponha que ω é "SURPREENDENTE", provar que $d\omega = 0$.

   (c) Suponha ω "SURPREENDENTE", achar $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $df = \omega$.

   Comentário 1: Este exercicio mostra que $\{$formas "SURPREENDENTES"de $M\} = \{df : f \in C^\infty(M)\}$

   Comentário 2: Vale a reciproca, e vale também para curvas γ que sao C^1 por partes.

   Comentário 3: Dá para transladar o resultado para variedades gerais mas esse f é só local, não necessariamente existe global.

4. Considere $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e seja $\omega \in \Omega^1(M)$ a **forma de ângulo**, dada por:

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

   Mostre que:

   (a) $d\omega = 0$ ($\Rightarrow$ o integral por caminho de ω não depende da curva sempre que a curva esteja numa bola por Stokes)

   (b) $\int_{\mathbb{S}^1} \omega = 2\pi$ (não integra zero numa curva fechada!)

   (c) Verificar que existem abertos U, V de $U \cup V = M$ e funções suaves $f \in C^\infty(U)$, $g \in C^\infty(V)$ tais que $df = \omega|_U$, $dg = \omega|_V$, mas se convença que não existe uma função global.

   Comentário: Veja que este exercicio mostra que ω é surpreendente mas só localmente. Por que aconteceu isso aqui e nao no exercício anterior? O que aconteceu?

   Dica: Para achar as funções f, g, recomendo pensar em $f(x, y) =$"ângulo que faz (x, y) com o eixo x".

5. Sejam M^m, N^n variedades compactas orientadas e $\omega \in \Omega^m(M), \eta \in \Omega^n(N)$. mostrar que:

$$\int_{M \times N} \pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \eta = \left(\int_M \omega \right) \cdot \left(\int_N \eta \right)$$

6. Em termodinâmica é usual associar a cada gás G com uma superficie (mas nunca falam isso), que também vamos denotar G (chamado diagrama p, V, T). Esta variedade possui 3 funções importantes $p, V, T \in C^\infty(G)$ (pressão, volume e temperatura). Além disso é usual assumir que pelo menos um dos pares (p, V), (p, T) ou (V, T) define um sistema de coordenadas. Considere também a forma $\omega = pdV$. Quando queremos levar o gas de uma condição (p_0, V_0, T_0) até uma condição (p_1, T_1, V_1), podemos fazer de muitas formas (existem muitos caminhos ligando esses pontos!). Seja γ uma curva que liga esses pontos, que representa o processo pelo qual levamos o gas de uma condiçao na outra. Definimos o **trabalho** realizado como $W = \int_\gamma \omega$

(a) Mostrar que (p, V, T) define uma imersão em $\mathbb{R}^3$

(b) Num gas ideal (p, V, T) estão relacionadas por $pV = nRT$ onde n, R são constantes. Suponha que o gas vai de (p_0, V_0, T_0) até (p_1, V_1, T_0) por uma curva que não muda a temperatura (processo isotermico). Calcular o trabalho.

(c) Calcular o trabalho de (p_0, V_0, T_0) até (p_0, V_1, T_1) por uma curva que mantém constante a presão (processo isobárico).

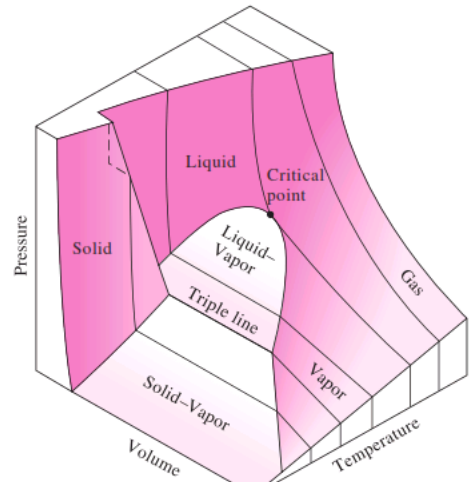

Figura 1: Exemplo de diagrama PVT: Veja que o diagrama pode ser representado em otros estados da matéria (não somente gas), mas típicamente na transição de estados perde a suavidade.

7. Dado um grupo de Lie compacto, mostre que exite uma forma de volume bi-invariante, isto é, invariante pela esquerda e pela direita.(DICAS?)

8. Dado um grupo de Lie compacto, conexo G e Λ uma forma de volume invariante pela esquerda e pela direita tal que $\int_G \Lambda = 1$. Definimos a média de $\omega \in \Omega^k(M)$ e dentado por $M(\omega)$ pela fórmula:

$$(M(\omega))_p(v_1, \ldots, v_k) = \int_G ((L_g)^*\omega)_p(v_1, \ldots, v_k)\Lambda$$

Mostrar que:

(a) $M(\omega)$ é uma k-forma invariante pela esquerda.

(b) Se ω já era invariante pela esquerda, então $M(\omega) = \omega$

(c) $d(M\omega) = M(d\omega)$

9. Seja $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanianna compacta orientável sem bordo. Defina $d^* : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ por $d^*\omega = (-1)^{n(k+1)+1} {*d*}\omega$ (para funções definimos $d^* f = 0$). Prover que:

(a) $d^* \circ d^* = 0$

(b) $(\omega, \eta) = \int_M \langle \omega, \eta \rangle \mathrm{Vol}$ define um produto interno em $\Omega^k(M)$

(c) Mostrar que $(d\omega, \eta) = (\omega, d^*\eta)$ para $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ e $\eta \in \Omega^k(M)$.

10. (Teorema de Frobenius local) Considere $D^d \subseteq TM$ um subfibrado vetorial de TM. Uma subvariedade $F^d \subseteq M$ é dita uma variedade integral de D (ou que F intergra D) se $T_q F = D_q$. Dizemos que D é integrável se para todo ponto $q \in M$ existe uma variedade $F = F_q$ que integra D. Mostrar que:

(a) Se D é integrável então D é involutiva, isto é, se X, Y são seções locais de D então $[X, Y] \in D$.

(b) Dizemos que D é completamente integrável se para todo ponto $p \in M$, existe uma carta ϕ numa vizinhança de p tal que $D = \mathrm{spam}\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_d}\}$. Mostre que completaménte integrável implica integrável.

(c) (Dificil) Mostre que involutivo implica completamente integrável.

Dica: Indução, pode ser útil o exercicio 2 e 10 da lista 5.