Lista 7, Analise em variedades

Diego N. Guajardo

7 de dezembro de 2020

Sempre M, N vaõ ser variedades suaves($= C^\infty$), as vezes vamos denotar M^n para $n = \dim M$. Se achar que é necessario, pode assumir que as variedades são conexas. Podem ser uteis os teoremas 5.27, 5.29 do Lee para simplificar que alguns mapas sao suaves, podem usar sem provar. $\mathfrak{X}(M)$ denota os campos vetorias sobre M.

1. Em dimensão 3 temos uma coincidencia: $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathbb{R}^3)^* = \dim(\bigwedge^2 \mathbb{R}^{3*}) = 3$. Sendo assim, é comum nos livros que identifiquem os campos vetoriais com as 1 formas e as 2 formas. De fato, dado um campo vetorial $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ em $\mathbb{R}^3$, temos os operadores diferenciais divergencia $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ e rotacional $\vec{\nabla} \times \vec{F}$. Mas pelas dimensões podemos associar as formas:
$$\omega_{\vec{F}} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$
$$\eta_{\vec{F}} = F_x dy \wedge dz + F_y dz \wedge dx + F_z dx \wedge dy$$
Veja que o rotacional e a divergencia correspondem a $d\omega_{\vec{F}}$ e $d\eta_{\vec{F}}$ respetivamente.

   Comentário: Veja que a identidade $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$ é simplesmente $d^2(\omega_{\vec{F}}) = 0$. Também $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$ corresponde com $d^2 f = 0$.

   Comentário: Este exercício é importante porque mostra que a derivada de formas generaliza o gradiente, o rotacional e a divergencia simultanemente! Dá para conjeturar mais ainda, deve ser possivel integrar formas e obter um teorema generalizado o teorema fundamental do cálculo, o teorema de Stokes e o teorema da divergencia em um teorema só.

2. Considere as seguintes duas das quatro equações de Maxwell:
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$
Mostre que estas são reduzidas a $dF = 0$ onde $F = B + E \wedge dt$ é o campo eletromagnetico.

   Comentário: Isto mostra que para estudar eletromagnetismo a linguagem natural é o uso de formas e trabalhar em dimensão 4. Reparar que dF não é nem o rotacional nem a divergencia, é um novo operador diferencial que só faz sentido em dimensão 4 e não em dimensão 3. Isto permite também entender o eletromagnetismo em variedades mais complicadas que $\mathbb{R}^4 = (t, x, y, z)$, que é fundamental já que o espaço-tempo tem topologia mais complicada do que essa (buracos negros por exemplo ou objetos teoricos como buracos de minhoca, buracos blancos, etc)

   Comentário: Da para reduzir as outras duas equaçoes de Maxwell em uma, mas é necessario falar de produtos internos com sinal (metrica de Lorentz) e o operador estrela de Hodge associado a este tipo de produtos. Tudo isto é muito usado na física moderna. O desenvolvimento destas teorias físicas ajudou a desenvolver teorias matemáticas interesantes, como a teoria de gauge, teoria de Yang Mills, geometria spin, etc.

3. Dada M variedade sem bordo e $f \in C^\infty(M)$ com $a, b \in \mathbb{R}$ valores regulares de f com $a < b$. Mostrar que $M_b = f^{-1}((-\infty, b])$ e $M_{a,b} = f^{-1}([a, b])$ são subvariedades regulares com bordo.

4. Contas:

   (a) Considere em $\mathbb{R}^4$ as formas $\omega = x^2 dx \wedge dy + \cos(z) dy \wedge dw$ e $\eta = e^w dx \wedge dydz + 3dx \wedge dw \wedge dz$. Calcule $d\omega$ e $d\eta$.

   (b) Considere a dois forma em $\mathbb{R}^4$ dada por:
$$\omega = F_{12} dx^1 \wedge dx^2 + F_{13} dx^1 \wedge dx^3 + F_{14} dx^1 \wedge dx^4 + F_{23} dx^2 \wedge dx^3 + F_{24} dx^2 \wedge dx^4 + F_{34} dx^3 \wedge dx^4$$
   Onde $F_{ij} \in C^\infty(M)$. Calcular $d\omega$.

Comentário: Einstein criou uma notação muito usada em física, o convençao de Einstein. Para simplificar a fórmula anterior ele denotava $\omega = \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta}$, onde as letras gregas representam os índices e o fato de ter um índice igual acima e outro embaixo quer dizer "somar neste índice", no nosso caso estamos somando em α e em β. Reparar que o $\frac{1}{2}$ vem de que estamos somando todos os índices e não só com $\alpha < \beta$. Além disso, estamos supondo que $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$, já que é um tensor antisimétrico.

5. Considere $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade riemanniana orientada. Mostre que:
   (a) Mostre que existe uma única $\mathrm{Vol}_M \in \Omega^n(M^n)$, chamada **forma de volume**, que associa a bases ortonormais orientadas o valor 1.
   (b) Seja $i : S \to M$ uma subvariedade mergulhada e suponha que existe um vetor normal unitário N sobre S. Mostre que $\mathrm{Vol}_N = i^*(i_N \mathrm{Vol}_M)$
   (c) Dado $f \in C^{\infty}(M)$ podemos associar o campo **gradiente** $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ dado pela fórmula $\langle \nabla f, \cdot\rangle = df(\cdot)$. Suponha que $a \in \mathbb{R}$ é um valor regular de f. Mostre que ∇f é normal a $S = f^{-1}(a)$ e conclua que S é orientável.

6. Seja $\mathbb{S}^n$ uma esfera centrada na origem de $\mathbb{R}^{n+1}$. Mostrar que a forma de volume $\omega \in \Omega^n(\mathbb{S}^n)$ é dada por $\omega = \eta|_{\mathbb{S}^n}$ onde η é a n-forma de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$:

$$\eta = \sum_{i=0}^{n} |x|^{-(n+1)}(-1)^i x_i dx_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots dx_n$$

7. Colagem
   (a) Seja M uma variedade com bordo. Mostre que existe um aberto U de M contendo ∂M e um difeomorfismo $F : \partial M \times [0,1) \to U$ tal que $F(p) = p$ para todo $p \in \partial M$. Este tipo de vizinhança é chamada **vizinhança colar**.
   (b) Sejam M_1, M_2 variedades com bordo ∂M_1 e ∂M_2 e um difeomorfismo $h : \partial M_1 \to \partial M_1$. Considere o espaço $M = (M_1 \cup M_2)/\sim$, onde $\sim$ é a relação de equivalencia dada por $x \sim x$ para todo $x \in \overset{\circ}{M_1} \cup \overset{\circ}{M_2}$, e também $x \sim h(x)$ para todo $x \in \partial M_1$. Forneça uma estrutura de variedade suave para M, de modo que os mapas $i_k : M_k \to M$ dado por $i_k(x) = [x]$ é suave.

   Dica na parte (a): Extenda o campo que aponta para dentro e use o fluxo. Pode supor que ∂M é compacto para simplificar as contas.

   Comentário: As vezes a colagem por h é denotada $M = M_1 \cup_h M_2$.

   Comentário: Dadas duas variedades M_1, M_2 sem bordo podemos tirar bolas abertas pequenas de cada uma e colar essas variedades (ambas possuem bordo $\mathbb{S}^{n-1}$). A variedade assim obtida é chamada de **soma conexa** e denotada $M = M_1 \# M_2$.

8. Dizemos que duas variedades sem bordo e compactas N_1^n, N_2^n são **cobordantes** e denotamos por $N_1^n \sim N_2^n$ se existe uma variedade com bordo M^{n+1} tal que $\partial M = N_1 \sqcup N_2$ (união disjunta). Mostrar que:
   (a) A relação $\sim$ define uma relação de equivalencia, definimos como Ω_n as classes de equivalencia.
   (b) Mostrar que $[N_1] + [N_2] := [N_1 \sqcup N_2]$ define uma estrutura de grupo em Ω_n. Por este motivo Ω_n é chamado o n-ésimo **grupo de cobordismo não orientado** (já que não estamos considerando orientações).
   (c) Mostrar que se $N_1 \sim N_2$ então $N_1 \times P \sim N_2 \times P$ para toda variedade P. Conclua que $[N] \cdot [P] = [N \times P]$ está bem definido.

   Comentário: Se definimos $\Omega_* = \bigoplus_{n \geq 0} \Omega_n$, então $(\Omega_*, +, \cdot)$ é uma $\mathbb{F}_2$-álgebra graduada. Em particular Ω_* é um $\mathbb{F}_2$-espaço vetorial e um anel.

   Comentário: Dá para fazer uma teoria de cobordismo orientada. Dadas duas variedades orientadas sem bordo N_1, N_2 dizemos que $N_1 \sim N_2$ se existe uma variedade orientada com bordo M tal que $\partial M = N_1 \sqcup N_2$, onde esta igualdade preserva a orientação (lembrar que o bordo possue uma orientação induzida). Neste caso $(\Omega_*, +, \cdot)$ é uma $\mathbb{Z}$-álgebra graduada alternada e é comutativa no sentido graduado, $[N^n] \cdot [M^m] = (-1)^{nm}[M^m] \cdot [N^n]$.

9. (Fórmula MUITO ÚTIL) Dada $\omega \in \Omega^k(M)$ e campos $X_0, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, mostrar que:

$$d\omega(X_0, \ldots, X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i(\omega(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_k)) - \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_k)$$

   Onde o chapeu $\widehat{X_i}$, significa omitir essa variável.

10. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega \in \Omega^k(M)$. Provar a **fórmula mágica de Cartan**:

$$\mathcal{L}_X = di_X + i_X d$$

Isto é, $\mathcal{L}_X \omega = d(i_X \omega) + i_X(d\omega)$ para $\omega \in \Omega^k(M)$.

Dica: Usar a fórmula do exercício 9.

11. Dada $\omega \in \Omega^2(M)$ uma dois forma não degenerada e duas funções $f, g \in C^\infty(M)$, defina o **colchete de Poisson** de f, g como $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$. Dizemos que (M, ω) é uma **variedade simplética** quando $\omega \in \Omega^2(M)$ além de ser uma dois forma não degenerada é também fechada, isto é $d\omega = 0$. Fixado $H \in C^\infty(M)$ chamamos (M, ω, H) de um sistema Hamiltoniano

    (a) Dizemos que $f \in C^\infty(M)$ é uma **constante de movimento do sistema Hamiltoniano** (M, ω, H) se f é constante nas curvas integrais de X_H. Mostrar que f é uma constante de moviemento se, e somente se, $\{f, H\} = 0$

    (b) Mostrar que $[X_f, X_g] = X_{\{g,f\}}$

    (c) Prove a fótmula de Jacobi:

    $$0 = \frac{1}{2} d\omega(X_f, X_g, X_h) = \{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\}$$

    (d) Suponha que $f, g \in C^\infty(M)$ são constantes de movimento do sistema hamiltoniano (M, ω, H). Mostrar que $\{f, g\}$ também é uma constante de moviemnto.

Dica para (b): Pode usar a formula do exercício 9.
Dica para (c): Pode ser útil a fórmula da parte (c) do exercicio 9 da lista 6, pode ser útil a formula mágica de Cartan.