Lista 6, Analise em variedades

Diego N. Guajardo

7 de dezembro de 2020

Sempre M, N vaõ ser variedades suaves($= C^\infty$), as vezes vamos denotar M^n para $n = \dim M$. Se achar que é necessario, pode assumir que as variedades são conexas. Podem ser uteis os teoremas 5.27, 5.29 do Lee para simplificar que alguns mapas sao suaves, podem usar sem provar. $\mathfrak{X}(M)$ denota os campos vetorias sobre M.

1. (Fibrado cotangente) Propriedades básicas do fibrado cotangente $\pi : T^*M \to M$. Mostrar o seguinte:

   (a) Dada uma carta, $(\varphi = (x_1, \ldots, x_n), U)$ podemos associar uma base local de TM, $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ e assim temos a base dual, que vamos denotar $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$. Use isto para associar uma carta $\hat{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ de T^*M. Calcule a mudança de cartas com respeito a outra carta $(\phi, \pi^{-1}(V))$ com $U \cap V \neq \emptyset$. Que relação tem com a mudança de trivializações em TM?

   (b) Dado $f \in C^\infty(M)$, mostre que $df \in \Omega^1(M)$ dado por

   $$df_p(X_p) = X_p(f)$$

   define uma 1-forma chamada o **diferencial** de f. Mostrar que $d(f + g) = df + dg$ e $d(fg) = fdg + gdf$. Mostre também que se M é conexo e $df = 0$ então f é constante.

   (c) Dada a carta $(\varphi = (x_1, \ldots, x_n), U)$ da parte (a), mostrar que:

   $$dx_i = \sigma_i$$

   (d) Dado $\omega \in \Omega^1(M)$, mostre que na carta trivializante temos:

   $$\omega|_U = \sum \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) dx_i$$

   Em particular $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

   Comentário: Este exercício mostra por que sempre é denotado $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ para as seções trivializantes associadas a carta $(\varphi = (x_1, \ldots, x_n), U)$, porque de fato são diferenciais de funções. NUNCA vão ver a notação por σ_i.

   Comentário: Em $\mathbb{R}^n$ para estudar uma função era bem útil trabalhar com o gradiente. Este exercício mostra que este conceito pode ser estendido para variedades gerais mas é necessario trabalhar no dual.

2. Exercício com formas:

   (a) Em $\mathbb{R}^4$ com coordenadas (x, y, z, w) considere as formas $\omega = (x + w^2)dx \wedge dy + e^z dx \wedge dw + \cos(x)dy \wedge dz$, $\eta = xdy \wedge dz - e^z dz \wedge dw$. Calcule:

   $$\omega \wedge \eta$$

   (b) Considere $F(r, \varphi, \phi) = (r \sin(\phi)\cos(\varphi), r \sin(\phi)\sin(\varphi), r \cos(\phi))$, calcule $F^*(dx \wedge dy \wedge dz)$.

   (c) Considere em $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ as formas que com respeito à projeção estereográfica do polo norte possuem a expressão local:

   $$\omega = dx, \quad \eta = dx \wedge dy$$

   Elas possuem extensões suaves ao polo norte?

3. Seja G um grupo de Lie, dizemos que $\omega \in \Omega^k(G)$ é invariante pela esquerda se $L_g^*\omega = \omega$ para todo $g \in G$. Denotamos como $\Omega^k(G)^L$ o conjunto das k-formas invariantes pela esquerda. Mostrar que:

   (a) $\Omega^k(G)^L$ é um espaço vetorial.

   (b) $T : \Omega^k(G)^L \to \bigwedge^k \mathfrak{g}^*$ dado por $T(\omega) = \omega_e$, onde $e \in G$ é a identidade do grupo, é um isomorfismo linear.

Dica: Sobrejetividade: para mostrar a suavidade lembre que ω é suave se e somente se, $\omega(X_1, \dots, X_k)$ é suave para quaisquer campos, mas repare que neste caso basta para campos invariantes pela esquerda.

Comentário: Este exercicio mostra que o fibrado $\bigwedge^k(T^*G) \xrightarrow{\pi} G$ é trivial. De fato, veja a proposição 10.19 e o corolário 10.20 do Lee.

4. (Eletromagnetismo) Em eletromagnetismo são estudados dois campos vetorias (que dependem do tempo) e entendidos como funções $\vec{E}, \vec{B} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que em componentes são expressados como $\vec{E}(t,p) = (E_x, E_y, E_z)$, $\vec{B}(t,p) = (B_x, B_y, B_z)$ chamados de campo eléctrico e magnético respectivamente. O campo magnético possui uma propiedade curiosa, na literatura clássica E é chamado de "vetor"mas B é chamado um "pseudo vetor"ou "vetor axial"porque $\vec{E}$ muda de sinal com respeito ao difeomorfismo $I : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $I(p,t) = (-p,t)$, enquanto $\vec{B}$ não. Mostre que é mais conveniente expressar E e B como formas:

$$E = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

$$B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$$

5. Uma dois forma $\omega \in \Omega^2(M)$ é dita não degenerada quando satisfaz a seguinte propriedade para todo $p \in M$:

$$\omega_p(v_p, w_p) = 0 \quad \forall w_p \Rightarrow v_p = 0$$

Mostre que:

(a) $\omega_p^\# : T_pM \to T_p^*M$ dado por $\omega_p^\#(v_p)(w_p) = \omega(v_p, w_p)$ é um isomorfismo.

(b) Dada $H \in C^\infty(M)$ definimos $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ como o **campo Hamiltoniano** de H e definido pela fórmula:

$$\omega^\#(X_H) = dH$$

Seja $\gamma(t)$ uma curva integral de X_H. Mostre que $H(\gamma(t))$ é constante.

(c) Em $\mathbb{R}^{2n}$ com coordenaddas (q_i, p^i), considere a dois forma $\omega = \sum_1^n dq_i \wedge dp^i$ e $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Mostre que ω é não degenerada e calcule o campo Hamiltoniano associado a H. Que equação deve satisfazer uma curva integral de X_H?

Comentário: Este exercicio é muito importante para em física. H é interpretada como a energía de um sistema físico, o campo Hamiltoniano é um campo cujas curvas integrais preservam a energía e estas curvas são soluções do sistema mecanico. De fato, veja que as equações da curva integral de X_H da parte (c) são as equações de Hamilton! Aqui temos a ideia de como começar a fazer mecanica em variedades diferentes a $\mathbb{R}^n$. É também a base da geometria simplética.

6. Dada uma carta $(\varphi = (q_1, \dots, q_n), U)$ de M e $(\hat{\varphi} = (q_1, \dots, q_n, p^1, \dots, p^n), \pi^{-1}(U))$ a carta associada em T^*M. Mostrar que a 1-forma tautologica $\lambda \in \Omega(T^*M)$ é dada em cartas por:

$$\lambda = \sum p^i dq_i$$

Comentário: É comum ver em livros de física que para trabalhar com a forma tautológica são usadas coordenadas q_i e p^i (com índices acima) para as coordenadas do dual, e não (x_i, y_i). Isto vem de que podem ser interepretadas como coordenadas posição e momentum de um sistema físico. Nós não vamos usar esta notação.

7. (Produto interior) Dado um campo $X \in X(M)$, $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^l(M)$. Definimos o **produto interior** por X como $i_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ por:

$$i_X\omega(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1})$$

Podemos pensar $i_X : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ onde definimos $i_X f := 0$, para $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$. Mostrar que o produto interno satisfaz as seguintes propiedades:

(a) $i_X \circ i_X \omega = 0$

(b) $i_X(\omega \wedge \eta) = i_X\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge i_X\eta$

(c) Seja $Y \in \mathfrak{X}(N)$ e $F : M \to N$, tais que X e Y são F-relacionados. Mostrar que:

$$i_X F^*\omega = F^* i_Y \omega$$

(estamos vendo $\omega \in \Omega^k(N)$).

(d) Considere $\omega = e^x dx \wedge dz + e^z dy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, $Y = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$. Calcule $i_Y\omega$.

(e) Considere $X = Y|_{\mathbb{S}^2} \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ e $\eta = \omega|_{\mathbb{S}^2}$, calcule $i_X\eta$.

Comentario: As vezes é também denotado $X \lrcorner\, \omega$ e chamado **derivada interior** por X.

8. Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço vetorial orientado com dim$V$ finita com um produto interno. Mostrar que:

(a) Podemos associar um produto interno e uma orientação no dual, dada uma base ortonormal orientada $\{v_1, \ldots, v_n\}$ definimos sua base dual $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ de V^* como ortonormal e orientada. Mostre que este produto e orientação não depende da escolha de base ortonormal orientada escolida.

(b) Mostre que Vol$= \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \in \bigwedge^n(V)$ não depende da escolha de base ortonormal orientada. Esta é chamada de forma de volume (reparar que em $\mathbb{R}^n$, Vol$= dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$).

(c) Temos um produto interno unicamente definido em $\bigwedge^k(V^*)$, pela fórmula:

$$\langle \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k, \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k \rangle = \det(\langle \omega_i, \eta_j \rangle)$$

onde $\omega_i, \eta_j \in V^*$ Dica: ache uma base ortonormal em função dos σ_i.

(d) O **operador estrela de Hodge**, $* : \bigwedge^k(V^*) \to \bigwedge^{n-k}(V^*)$ é o operador unicamente definido pela fórmula:

$$\omega \wedge *\eta = \langle \omega, \eta \rangle \text{Vol}$$

onde $\omega, \eta \in \bigwedge^k(V^*)$.

(e) Verificar que $*^2 = (-1)^{k(n-k)}$

Comentário: Naturalmente toda essa construção algébrica se fibraliza para variedades Riemannianas orientáveis, neste caso temos o operador estrela de Hodge $* : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$.

9. (Derivada de Lie) Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ ϕ_t seu fluxo e $\omega \in \Omega^k(M)$, definimos a **derivada de Lie** de ω por X como:

$$(\mathcal{L}_X\omega)_p = \lim_{t\to 0}\left(\frac{(\phi_t^*(\omega))_p - \omega_p}{t}\right)$$

Mostrar que:

(a) Dada uma $\eta \in \Omega^l(M)$ temos:
$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = (\mathcal{L}_X\omega) \wedge \eta + \omega \wedge (\mathcal{L}_X\eta)$$

(b) Dados $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, mostrar que:

$$(\mathcal{L}_X\omega)(X_1, \ldots, X_k) = X(\omega(X_1, \ldots, X_k)) - \sum_{i=1}^{n} \omega(X_1, X_2, \ldots, \mathcal{L}_X X_i, \ldots, X_n)$$

Onde $\mathcal{L}_X X_i$ é definida no exericício 9, parte c) da lista 4.

(c) Conclua que $\iota_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ \iota_Y - \iota_Y \circ \mathcal{L}_X =: [\mathcal{L}_X, \iota_Y]$

Dica para (b): Recomendo não usar a fórmula $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$. Tal vez é melhor resolver primeiro para $\omega \in \Omega^1(M)$ para vizualizar como se prova o caso geral, lembrem como se provava em cálculo que $(fg)' = fg' + f'g$, neste exercício tem que "somar zero"de forma parecida.