Lista 5, Analise em variedades

Diego N. Guajardo

7 de dezembro de 2020

Sempre M, N vaõ ser variedades suaves($= C^{\infty}$), as vezes vamos denotar M^n para $n = \dim M$. Se achar que é necessario, pode assumir que as variedades são conexas. Podem ser uteis os teoremas 5.27, 5.29 do Lee para simplificar que alguns mapas sao suaves, podem usar sem provar. $\mathfrak{X}(M)$ denota os campos vetorias sobre M. (A imagem foi tirada do google, nao fui eu que desenhei)

1. Dada uma subvariedade mergulhada $N \subseteq M$ e um campo $X \in \mathfrak{X}(N)$. Mostrar que:

   (a) Para cada $p \in N$ é possivel estender o campo localmente para M, isto é, para cada $p \in N$, existe um aberto $U_p \subseteq M$ com $p \in U_p$ e um campo $X^p \in \mathfrak{X}(U_p)$ tal que $X^p(x) = X(x)$ para todo $x \in U_p \cap N$.

   (b) Mostrar que existe um aberto $U \subseteq M$ e $\overline{X} \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $\overline{X}(x) = X(x)$ para todo $x \in N$.

   (c) Mostrar que podemos escolher U da parte (b) como $U = M$ se N for fechado em M. Mostre com um contraexemplo que não é necessariamente verdade se N não for fechado.

   Dica: Tente colar os X^p.

2. Seja $\pi : M \to N$ uma submersão sobrejetiva, $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Mostrar que existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ campo π-relacionado com Y, isto é, podemos levantar os campos.

3. Mostrar que $C^{\infty}(M)$ e $\mathfrak{X}(M)$ são $\mathbb{R}$-espaços vetorias de dimensão infinita.

4. Dizemos que um difeomorfismo $F : M \to M$ é dito de **suporte compacto** se $F(x) = x$ para todo x fora de um compacto $K = K_F$. Considere o campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ dado por $X_x = \rho(x)\left.\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right|_x$ onde $\rho \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ é uma bump fuction simétrica por rotações, não crescente na direção radial, tal que $0 \leq \rho \leq 1$, $\overline{B}(0,1) = \rho^{-1}(1)$, $B(0,2)^c = \rho^{-1}(0)$. Mostrar que:

   (a) Dado $p = (x, 0, \ldots, 0)$ com $-2 < x < 2$, existe um difeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de suporte compacto tal que $\phi(0) = p$ (Dica: O fluxo do campo pode ajudar).

   (b) Dada um variedade M conexa e $p, q \in M$, existe um difeomorfismo de suporte compacto $\phi : M \to M$ tal que $\phi(p) = q$.

   Comentário: Em álgebra, por exemplo na teoria de grupos, dois elementos de um grupo podem possuir propiedades diferentes, a orden dos elementos podem ser diferentes (ou outras propiedadeS), este exercício mostra que desde o ponto de vista diferencial não tem propiedades locais ou pontuais (isto não é verdade em variedades complexas), por este motivo é interessante adicionar estruturas ou estudar problemas globais em variedades.

5. Orientabilidade:

   (a) Mostrar que $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ são orientáveis. Suponha que $U \subseteq M$ é um aberto e M é orientável, mostrar que U é orientável.

   (b) Suponha que $M \times \mathbb{R}^n$ é orientável, mostrar que M é orientável.

   (c) Mostrar que $M \times N$ é orientável se e somente se, M e N são orientáveis.

   Dica para (c): Pegue um aberto $\mathbb{R}^n \cong U \subseteq N$ e veja $M \times U \subseteq M \times N$.

6. A faixa de Mobius e a orientabilidade:

   (a) Verificar que a faixa de Mobius não é orientável (exercício 10, lista 1).

   (b) Verificar que o fibrado $M^2 \to \mathbb{S}^1$ é não orientável, onde M^2 é a faixa de Mobius (exercício 7, lista 4).

7. Seja $G \times M \to M$ uma ação propriamente descontínua, provar que:

(a) M/G é orientável se e somente se, existe uma orientação de M que é preservada pelos difeomorfismos de G

(b) Conclua que a garrafa de Klein e a faixa de Mobius não são orientáveis

(c) Provar que $\mathbb{R}P^n$ é orientável se e somente se, n é impar.

Dica (c): Prove que o difeomorfismo da esfera $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \to (-x_0, x_1, \ldots x_n)$ inverte a orientação e veja que o mapa antipodal é uma composição desses mapas.

8. Dado um fibrado de linhas reais $\pi : L \to M$, com M compacto, mostrar que:

(a) Existe um mapa suave $\hat{f} : L \to \mathbb{R}^m$ linear e injetivo nas fibras para m suficientemente grande.

(b) Mostrar que existe um morfismo de fibrados:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & \gamma^1_{m-1} \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}P^{m-1} \end{tikzcd}$$

induzido por $\hat{f}$, com F isomorfismo em cada fibra.

(c) Mostrar que L é isomorfo a $f^*\gamma^1_{m-1}$ como fibrados.

Comentário: Este exercício é importante para estudar fibrados, de algum modo esta dizendo que todos os fibrados são classificados por mapas $f : M \to \mathbb{R}P^1 \cup \mathbb{R}P^2 \cup \ldots = \mathbb{R}P^\infty$. Por este motivo $\gamma^1 = \gamma^1_1 \cup \gamma^1_2 \cup \ldots$ é chamado de fibrado universal ($\pi : \gamma^1 \to \mathbb{R}P^\infty$, é de fato um fibrado vetorial, com base de dimensão infinita).

9. (Vizinhança Tubular) Considere $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ uma subvariedade mergulhada, por simplicpidade vamos supor compacta. O **espaço normal** em p é dado por $N_pM \subseteq T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ dos vetores normais a $T_pM \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos o **fibrado normal** como $NM = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : p \in M, v \in N_pM\}$, reparar que $M_0 = \{(p, 0)\} \subseteq NM$ é obviamente difeomorfo a M. Mostre que:

(a) NM é uma subvariedade de $T\mathbb{R}^n$.

(b) Defina $E : NM \to \mathbb{R}^n$ por $E(p, v) = p + v$ é um difeomorfismo local em todo ponto de M_0.

(c) Mostrar que existe um $\varepsilon > 0$, tal que $E_V : V \to U = E(V)$ é um difeomorfismo onde $V = V_\varepsilon = \{(p, v) \in NM : |v| < \varepsilon\}$

Dica para (c): Suponha que não, e que existe sequencia $\varepsilon_n \to 0$ tal que não acontece o que a gente quer.

Comentário: Uma vizinhança U como a do enunciado é chamada uma **vizinhança tubular**. Reparar que da para levar a projeção para U, isto é, $r = \pi \circ E^{-1} : U \to M$, r é chamada de retração de U em M. Este tipo de vizinhanças é muito útil para fazer detalhes tecnicos, como aproximar funções continuas por suaves ou fazer homotopias. Se queremos uma função "boa"$F : M \to N$, podemos mergulhar M, N em $\mathbb{R}^N$ pelo teorema de Whitney e usar as vizinhanças tubulares para ter mais liberdade, usar técnicas de $\mathbb{R}^N$ para achar uma função apropiada entre essas vizinhanças tubulares e no final acabamos projetando nas variedades usando as retrações.

Comentário: Se M não for compacta, é necessário que $\varepsilon = \varepsilon(p)$ seja uma função continua que varia dependendo do ponto (pense num cilindro em $\mathbb{R}^3$ cujo raio vai para zero no infinito mas nunca é zero).

10. (Fibração de Hopf) Veja que $\mathbb{S}^1$ age em $\mathbb{S}^{2n+1}$, por multiplicação $\alpha \cdot (z_0, \ldots, z_n) = (\alpha z_0, \ldots, \alpha z_n)$, e assim temos o mapa quociente $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 = \mathbb{C}P^n$. Defina $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{S}^1$ por $\Phi_i(z_0, \ldots, z_n) = ([z_0 : \ldots : z_n], \frac{z_i}{|z_i|})$, onde $U_i = \{[z_0 : \ldots : z_n] \in \mathbb{C}P^n; z_i \neq 0\}$. Verificar que a familia de mapas $(\Phi_i, \pi^{-1}(U_i))$ fornece uma estrutura de $\mathbb{S}^1$-fibrado a $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$, com fibra típica $\mathbb{S}^1$. Achar $\xi_{ij} := \xi_{U_iU_j} : U_i \cap U_j \to \mathbb{S}^1$.

Comentário: Reparar que se denotamos $\Phi_i(z) = (\pi(z), \theta_i(z))$, temos que $\Phi_i(g \cdot z) = (\pi(z), g\theta_i(z))$, isto é, $\theta_i(g \cdot z) = g\theta_i(z)$, isto é, não só é localmente um produto a ação é localmente trivial. Quando um fibrado possui essa propriedade adicional é dito um **G-fibrado principal**.

Comentário: Veja que o caso particular $n = 1$, temos o $\mathbb{S}^1$-fibrado $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{C}P^1 = \mathbb{S}^2$, em particular, tirando um ponto de $\mathbb{S}^3$ e usando as projeções esteoreográfica podemos desenhar em $\mathbb{R}^3$ (veja o gráfico)

Comentário: Uma teoria bonitissima da geometria do último século é a teoria de classes caracteristicas, que permitem estudar como se "torcem"os fibrados, associando invariantes topologicos que medem quan torcido esta e em que dimensões (existem torçoes de diferentes dimensoes).

Comentário: G-fibrados são muito importantes na física, a ideia básica é que permite estudar Lagrangeanos que são invariantes pela ação do grupo. Permitiram interpretar o comportamento de particulas elementares, por este motivo são úteis na mecanica quantica relativista, em electrodinamica quantica e em outras áreas.

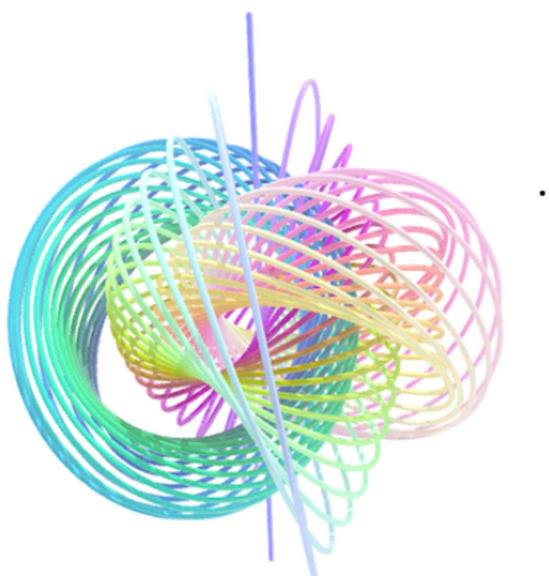

Figura 1: Fibração de Hopf: Cada circulo de uma cor representa uma mesma fibra, veja que tem uma reta vertical no eixo z, essa representa a fibra que fecha no infinito, no polo norte da esfera S^3, tem desenhos, videos e gifs muito bonitos na internet, sugiro olhar