Lista 4, Analise em variedades

Diego N. Guajardo

7 de dezembro de 2020

Sempre M, N vaõ ser variedades suaves($= C^\infty$), as vezes vamos denotar M^n para $n = \dim M$. Se achar que é necessario, pode assumir que as variedades são conexas. Podem ser uteis os teoremas 5.27, 5.29 do Lee para simplificar que alguns mapas sao suaves, podem usar sem provar. $\mathfrak{X}(M)$ denota os campos vetorias sobre M.

1. Seja G um grupo de Lie, denotamos por $L_g : G \to G$ a multiplicação pela esqueda por $g \in G$, e por $\mathfrak{X}(G)^L = \{X \in \mathfrak{X}(G) : X$ está L_g relacionado com $X, \forall g \in G\}$ os **campos invariantes pela esquerda**. Mostrar que:
   (a) $(\mathfrak{X}(G)^L, [\cdot,\cdot]) \subseteq (\mathfrak{X}(G), [\cdot,\cdot])$ é uma subalgebra de Lie.
   (b) Seja $e \in G$ o elemento neutro de G, denote por $\mathfrak{g} = T_eG$. Mostre que $T : \mathfrak{X}(G)^L \to \mathfrak{g}$ dado por $T(X) = X_e$ é um isomorfismo linear. Este isomorfismo permite transladar o colchete a $\mathfrak{g}$, por este motivo é chamado **a álgebra de Lie** de G.
   (c) Seja $F : G \to H$ homomorfismo de grupos de Lie. Mostrar que $F_{*,e} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, isto é:
   $$F_{*,e}([v, w]) = [F_{*,e}(v), F_{*,e}(w)]$$

   Comentário: A relação $G \to \mathfrak{g}$ é funtorial, e de fato é quase uma equivalencia de categorias. Isto é, estudar grupos de Lie é quase a mesma coisa que estudar álgebras de Lie.

2. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X_p \neq 0$, então existe carta local $(p \in U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$, tal que $X = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$ nesta carta.

   Dica: Use como sua primeira coordenada da carta o "tempo"do fluxo de X.

3. Suponha que o fluxo $\varphi(t, x)$ de $X \in \mathfrak{X}(M)$, está definido pelo menos em $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$ onde $\varepsilon > 0$ fixo. Mostrar que o fluxo esta definido em $\mathbb{R} \times M$. Conclua que se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo com suporte compacto (isto é, existe um $K \subseteq M$ compacto tal que $X_p = 0$ para todo $p \in M \setminus K$), então o fluxo está definido em $\mathbb{R} \times M$.

4. Neste exercício vamos calcular a algebra de Lie de alguns exemplos.
   (a) Considere $Gl_n(\mathbb{R})$ o grupo linear, que é um aberto de $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ os automorfismos lineares em $\mathbb{R}^n$, por este motivo, $\mathfrak{gl}(n) = T_I(Gl_n(\mathbb{R}))$ é isomorfo naturalmente a $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ $(T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n)$, espaço que já possui um colchete de Lie, dado pelo comutador de morfismos. Mostrar que o isomorfismo linear da parte b) do exercício 1, $T : \mathfrak{X}(Gl_n(\mathbb{R}))^L \to \mathfrak{gl}(n)$ já é um isomorfismo de álgebras de Lie.
   (b) Indique a algebra de Lie de $SL(n), O(n), SO(n)$.
   (c) (Grupo de Heisenberg) Seja
   $$H_{2n+1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a^t & c \\ 0 & I_n & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R} \right\}$$
   Mostrar que H_{2n+1} é um grupo de Lie com a estrutura produto de matrizes, calcular sua algebra de Lie. Mostrar que H_3 é nilpotente.

   Dica: Veja a definição dá algebra de Lie no exercício 1. Também pode ser útil a parte c), para $F =$inclusão de $Sl(n) \subseteq Gl_n(\mathbb{R})$.

   Comentário: notar que como variedades é difeomorfa a $\mathbb{R}^{2n+1}$, mas nao como grupo de lie (com a estrutura da soma de vetores).

   Comentário: o grupo de Heisenberg é útil na mecatnica quantica (compare a algebra de Lie de H_3 com o comutador da posiçao, momentum e identidade)

5. Seja M uma variedade $E, F \to M$ dois fibrados de linha (isto é, a fibra é isomorfa a $\mathbb{R}$). Dizemos que $E \sim F$ se existe um isomorfismo de fibrados $T : E \to F$, com $T(E_p) = F_p$ para todo $p \in M$, isto define uma relação de equivalência entre fibrados. Seja $\mathcal{L} = \{\text{fibrados de linhas sobre } M\}/\sim$. Mostrar que $(\mathcal{L}, \cdot)$ é um grupo abeliano, onde a estrutura produto é definida por:

$$[E] \cdot [F] := [E \otimes_{\mathbb{R}} F]$$

Comentário: Este grupo é chamado de **grupo de Picard** real. Da para fazer uma construção analoga para fibrados de linha complexos e tomando produto tensorial complexo. Este grupo possui uma estrutura muito rica, é importante na topologia e nas geometrias algébrica e complexa.

Comentário: Reparar que em álgebra, $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}$, mas em fibrados acontecem fenomenos topologicos muito mais interessantes. Este exercicio mostra que podemos associar invariantes aos fibrados, por exemplo, podemos associar a ordem do fibrado no grupo.

6. (Fibrado de linha tautologico) Considere $\gamma_n^1 := \{([x], v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} : \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } \lambda x = v\} \subseteq \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ com a topologia de subespaço e considere $\pi : \gamma_n^1 \to \mathbb{R}P^n$ a projeção no primeiro fator. Forneça uma estrutura de fibrado vetorial em $(\gamma_n^1 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}P^n)$.

Comentário: Dá para fazer uma construção análoga em $\mathbb{C}P^n$, o resultado vai ser um fibrado de linhas complexas (isto é, de planos reais).

7. Seja a faixa de Mobius $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$, onde $\mathbb{Z}$ age por $n \cdot (x, y) = (x + n, (-1)^n y)$ e considere $\pi : M \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{S}^1$ a projeção na primeira coordenada. Forneça uma estrutura de fibrado vetorial para $(M \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^1)$. Mostre que este fibrado é isomorfo a $(\gamma_1^1 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}P^1)$.

Comentário: Veja que esta variedade é difeomorfa à faixa de Mobius da lista 1, mas aqui foi definida desta forma já que é mais fácil definir a estrutura de fibrado.

8. (Fibrados triviais) Dizemos que um fibrado $(E \xrightarrow{\pi} M)$ com fibra típica $\mathbb{R}^k$ é **trivial** se existe um isomorfismo de fibrados $T : E \to M \times \mathbb{R}^k$ tal que $T(E_p) = \{p\} \times \mathbb{R}^k$. Mostrar que os seguintes fibrados são triviais:

   (a) $T\mathbb{S}^n \oplus \varepsilon_1$ onde $\varepsilon_1 = \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ é o fibrado trivial $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

   (b) TG onde G é um grupo de Lie.

   Dica: Veja o exercicio 1, pode usar sem provar.

   Comentário: Uma variedade cujo fibrado tangente é trivial é dita **paralelizavel**.

9. O objetivo deste exercício é dar intepretações geométricas para o colchete de Lie.

   (a) Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$, denotamos por $\varphi_t^X(p)$ o fluxo de X saindo de p. Definimos indutivamente $X^{k+1}f = X(X^k f)$. Mostrar que:

$$f \circ \varphi_t^X(p) = f + t(Xf) + \frac{t^2}{2!}(X^2 f) + \ldots + \frac{t^k}{k!}(X^k f) + O(t^{k+1})$$

   Considere outro campo vetorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Seja $F_t = \varphi_{-t}^X \circ \varphi_{-t}^Y \circ \varphi_t^X \circ \varphi_t^Y$, mostre que:

$$f \circ F_t(p) = f(p) + t^2 [X, Y]_p(f) + O(t^3)$$

   (b) Conclua que para a curva $C(\varepsilon) = \varphi_{-\sqrt{\varepsilon}}^X \circ \varphi_{-\sqrt{\varepsilon}}^Y \circ \varphi_{\sqrt{\varepsilon}}^X \circ \varphi_{\sqrt{\varepsilon}}^Y(p)$ satisfaz:

$$\left.\frac{dC}{d\varepsilon}\right|_{0^+} = [X, Y]_p$$

   (c) Definimos a **derivada de Lie do campo Y ao longo de X** como o campo $\mathcal{L}_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ dado por:

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{t \to 0} \left(\frac{(\varphi_{-t}^X)_*(Y_{\varphi_t^X(p)}) - Y_p}{t} \right)$$

   Isto é, trazer o campo Y pelo fluxo do campo X e comparar com o propio campo Y. Mostrar que $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

10. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Mostrar que:

   (a) Dado um difeomorfismo $\phi : M \to M$, X é ϕ-relacionado com ele mesmo se e somente se, $\phi \circ \varphi_t^X = \varphi_t^X \circ \phi$ para todo t.

(b) Os fluxos φ_t^X, φ_s^Y comutam $\forall t, s$ suficientemente pequenos para fazer sentido compor, se e somente se, $[X, Y] = 0$.

(c) Suponha que $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M^n)$ são campos linealmente independentes. Mostrar que para todo ponto $p \in M$ existe uma carta $(p \in U, \phi = (x_1, \ldots, x_n))$ tal que $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ nesta carta para $i = 1, \ldots, k$, se e somente se, $[X_i, X_j] = 0$ para todo i, j.

Dica: Pode assumir o exercício 9. Também pode ser util fazer primeiro o exercício 2.

Comentário: Este exercício é uma generalização do teorema do fluxo que integrava um vetor com curvas, aqui estamos integrando k vetores com subvariedades de dimensão k. Este é um exercício importante na teoria de folheações, estamos escrevendo U como uma coleção de subvariedades de dimensão k (isto é, por "folhas").