Lista 3, Analise em variedades

Diego N. Guajardo

7 de dezembro de 2020

Sempre M, N vaõ ser variedades suaves($= C^\infty$), as vezes vamos denotar M^n para $n = \dim M$. Se achar que é necessario, pode assumir que as variedades são conexas. Podem ser uteis os teoremas 5.27,5.29 do Lee para simplificar que alguns mapas sao suaves, podem usar sem provar. $\mathfrak{X}(M)$ denota os campos vetorias sobre M.

1. Mostrar que existe $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1})$ tal que $X_p \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{S}^{2n+1}$.

   Comentário: Um resultado clássico na teoria é o teorema da bola cabeluda, não existe nenhum campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n})$ tal que $X_p \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{S}^{2n}$.

2. Achar $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ com um único zero.

3. Mostrar o seguinte:

   (a) Dada $f : M \to N$ suave, mostrar que o mapa $f_* : TM \to TN$ dado por $f_*(v_p) = f_{*,p}(v_p)$ é suave, linear nas fibras e que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\pi_M"'] & TN \arrow[d, "\pi_N"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

   (b) Mostre que em $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, podemos identificar naturalmente (sem escolha de base):

$$T_p\mathbb{S}^n \cong \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, p\rangle = 0\}$$

   Seja $T^1\mathbb{S}^n = \{v : |v| = 1\}$ o **fibrado tangente unitário**. Mostrar que é uma subvariedade mergulhada de $T\mathbb{S}^n$. Achar $\dim(T^1\mathbb{S}^n)$.

   Comentário: Dá para fazer a construção do fibrado tangente unitário em qualquer variedade diferencial.

   Comentário: Reparar que $\pi : T^1\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, é um fibrado, mas não um fibrado vetorial, é um fibrado por esferas (localmente é da forma $U \times \mathbb{S}^{n-1}$, onde $U \subseteq \mathbb{S}^n$, mas não globalmente)

4. (Grupos unitários e unitários especiais) Mostrar que:

   (a) Considere o **grupo unitário**:

$$U(n) = \{A \in Gl_n(\mathbb{C}) : AA^* = I\}$$

   Mostre que é uma subvariedade de $\mathbb{C}^{n\times n}$. Achar $\dim U(n)$. Mostrar que é um grupo de Lie. Verifique que

$$\mathfrak{u}(n) := T_I U(n) \cong \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) : A + A^* = 0\}$$

   (b) Considere o **grupo unitário especial**:

$$SU(n) = \{A \in U(n) : \det(A) = 1\}$$

   Mostre que $SU(n)$ é uma subvariedade de $U(n)$ e encontre sua dimensao. Mostrar que é um grupo de Lie. Verifique que

$$\mathfrak{su}(n) := T_I SU(n) \cong \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) : A + A^* = 0, \mathrm{tr}(A) = 0\}$$

   Comentário: Em um grupo de Lie G, é comum denotar $\mathfrak{g} = T_eG$ onde $e \in G$ é o elemento unitário, esta notação especial é dada pela importancia que tem este espaço na teoria de grupos de Lie.

5. (Submersões) Mostrar as seguintes propiedades das submersões:

(a) Se $\pi : M \to N$ é um submersão, mostrar que π é uma aplicação aberta, isto é, se $U \subseteq M$ é um aberto, $\pi(U) \subseteq N$ é um aberto.

(b) Considere $\pi : M \to N$ uma submersão sobrejetiva e $\overline{f} : N \to P$ um mapa. Considere $f = \overline{f} \circ \pi : M \to P$. Mostre que f é suave se e somente se, $\overline{f}$ é suave.

(c) Seja $\pi : M \to N$ uma submersão sobrejetiva e $f : M \to P$ suave tal que $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in M$ tais que $\pi(x) = \pi(y)$. Provar que existe entao uma aplicação suave $\overline{f} : N \to P$ tal que $f = \overline{f} \circ \pi$, isto é, podemos descer o mapa:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & P \\ N \arrow[ur, "\overline{f}"] & \end{tikzcd}$$

Dica: Usar a forma local das submersões.

Comentário: De algum modo as submersões sobrejetivas são o equivalente aos quocientes na álgebra. Esse exercicío é muito útil, permite definir funções nos "quocientes"de um modo bem mais simples do que usar cartas, além de que tipicamente a N possui uma topologia mais complexa.

6. Seja $P : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ um mapa suave homogeneo de grau $d \in \mathbb{Z}$, isto é, $P(\lambda x) = \lambda^d P(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostrar que existe um mapa suave $\tilde{P} : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^k$ tal que $\tilde{P}([x]) = [P(x)]$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{R}P^n \arrow[r, "\tilde{P}"] & \mathbb{R}P^k \end{tikzcd}$$

Conclua que dados $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}P^n$, existe um $\tilde{P} : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$ difeomorfismo tal que $\tilde{P}(\ell_1) = \ell_2$

Dica: Veja o exercicio 5

Comentário: Dá para fazer com $\mathbb{C}P^n$, se P é holomorfo, então $\tilde{P}$ é holomorfo.

7. Verifique as seguintes propriedades de grupos de Lie:

(a) Seja $D \subseteq G$ um subgrupo normal discreto, mostrar que existe uma única estrutura diferencial em G/D tal que $\pi : G \to G/D$ é um homomorfismo de grupos suave e um difeomorfismo local.

(b) Seja $G^{\text{o}} \subseteq G$ a componente conexa que contém o elemento neutro. Mostre que G^{o} é um grupo de Lie de G.

(c) Seja $F : G \to H$ um homomorfismo de grupos de Lie, isto é, F é suave e satisfaz $F(g_1 g_2) = F(g_1)F(g_2)$ para todos $g_1, g_2 \in G$. Verificar que o posto de $F_{*,p}$ é constante como função de p.

(d) Conclua que $\ker(F) \subseteq G$ é um subgrupo de Lie mergulhado.

8. Considere $f : M \to N$ suave, $S \subseteq N$ subvariedade mergulhada. Dizemos que f é **transversal** a S em $p \in f^{-1}(S)$ se $f_{*,p}(T_p M) + T_{f(p)} S = T_{f(p)} N$. Dizemos que f é transversal a S se for transversal para todo $p \inf^{-1}(S)$. Mostrar que $f^{-1}(S)$ é uma subvariedade de M de codimensão $\dim N - \dim S$. Mostrar também que $T_p(f^{-1}(S)) = f_{*,p}^{-1}(T_{f(p)} S)$

Comentário: Notar que se $S = \{ponto\}$ generaliza que a pré-imagem de um valor regular é uma variedade.

Comentario: Otra forma bem típica de usar esse teorema de transversalidade é com $f = i$ =inclusão de uma subvariedade, daí $f^{-1}(S) = S \cap M \subseteq N$. Assim, este exercício dá uma condição para garantir quando a interseção de variedades é uma variedade. Este tipo de coisas é bem importante em topologia.

Comentário: Reparar que estamos identificando $T_p S$ com $j_*(T_p S)$ onde $j : S \to N$ é a inclusão

9. Verificar que:

(a) Mostrar que $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$

(b) $\langle A, B \rangle = \dfrac{1}{2}\operatorname{tr}(AB^*)$ define um produto interno em $\mathfrak{su}(2)$ e que:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

é uma base ortonormal de $\mathfrak{su}(2)$ e assim podemos pensar $\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$ isometricamente ($E_i \to e_i$).

(c) Dado $A \in SU(2)$, veja que o mapa $\phi_A : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(2)$ dado por $\phi_A(B) = ABA^{-1}$ está bem definido e que $\phi_A \in O(3)$

(d) Verifique que $\phi : SU(2) \to O(3)$, $\phi(A) = \phi_A$ é homomorfismo de grupos de Lie que é um difeomorfismo local.

(e) Reparar que por conexidade $\phi : SU(2) \to SO(3)$. Mostrar que $\ker(\phi) = \{\pm I\}$, em particular, é um homomorfismo $2:1$. Conclua que $SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$

Comentário: As matrizes $\sigma_n = -iE_n$ são chamadas de **matrizes de Pauli**, importantes para estudar o spin de partículas em mecanica quantica. O grupo $SU(2)$ é de fato um grupo Spin.

10. (Curvas elipticas) Dica: assuma que o teorema da pré-imagem de um valor regular (para a matriz Jacobiana complexa) é uma variedade complexa (nao precisa expressar $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}^4$ nem tomar derivadas reais, não é recomendavel).

(a) Considere $a, b \in \mathbb{C}$. Seja a equação em $\mathbb{C}^2$ dada por:

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

mostrar que os pontos em $\mathbb{C}^2$ que satisfazem esta equaçao definem uma curva complexa $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}^2$ se $\Delta = -16(4a^3 + 27b^2) \neq 0$(em particular é uma superficie real)

(b) A curva anterior tem um problema, é quase compacta, falta um ponto só, mas podemos "adicionar os pontos"para que seja compacta. Considere

$$E = \{[x : y : z] \in \mathbb{C}P^3 : y^2 z = x^3 + axz^2 + bz^3\}$$

(Notar que na carta $U = \{[x : y : z] \in \mathbb{C}P^3 : z \neq 0\}$, $E \cap U$ é justamente a curva anterior) Mostrar que $E \subseteq \mathbb{C}P^3$ é uma subvarariedade compacta.

Comentário: Reparar que como conjuntos $E = \mathcal{C} \cup \{[0 : 1 : 0]\}$

Comentário: Veja como é útil o espaço projetivo, permite compactificar variedades, adicionando uns poucos pontos faltantes do "infinito".

Comentário: Dá para provar que E é de fato um toro, usando as funções periódicas de Weirtrass (veja o livro do alcides lins neto, funções de uma variável complexa).

Comentário: Como E é um toro, possui uma estrutura de grupo, e dadas duas soluções da equação elíptica, podemos achar uma terceira. Essa estrutura de grupo é muito usada na teoria de números já que as soluçoes racionais sao fechadas na estrutura do grupo. Um belíssimo teorema nesta teoria é o teorema de Mordell–Weil.