Lista 2, Analise em variedades

Diego N. Guajardo

7 de dezembro de 2020

Sempre M, N vaõ ser variedades suaves$(= C^\infty)$, as vezes vamos denotar M^n para $n = \dim M$. Se achar que é necessario, pode assumir que as variedades são conexas.

1. (O oito) Considere a curva $\alpha : (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(2t))$. Mostrar que $S = \alpha(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \subseteq \mathbb{R}^2$ não é uma subvariedade regular.

   Dica: Pode ajudar desenhar α em Wolfram.

   Comentário: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ é uma variedade mas $\alpha((-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})) \subseteq \mathbb{R}^2$ não é uma subvariedade regular, apesar de ser injetiva e uma imersão.

2. (Curva irracional) Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a curva $\alpha(t) = (t, \lambda t)$ onde $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Seja $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ o mapa quociente da ação de $\mathbb{Z}^2$ por translação. Considere a curva $\beta = \pi \circ \alpha$, mostrar que β é uma imersão em todo ponto, é injetiva mas não é um mergulho (=imersão+homeomorfa à imagem com a topologia de subespaço).

   Dica: dá para provar que $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{T}^2$ é denso.

   Comentário: Reparar que $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{T}^2$ é um subgrupo de Lie.

3. Considere $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^4$ dado por:
$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$$
   Verifique que f é suave e conclua que existe um mergulho $\overline{f} : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$.

   Dica: Veja que f é composição de funções mais simples de verificar a suavidade.

4. Seja $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^n$ o mapa $p(x) = \frac{x}{|x|}$, verificar que p é uma submersão. Conclua que $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$ é támbém uma submersão.

   Comentário: Também dá para provar que $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n$, $p : \mathbb{S}^{2n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ são submersões. De algum modo, as submersões são "projeções"ou "quocientes".

5. (Espaços lenticulares) Sejam $m \in \mathbb{N}$, p e q tal que $1 \leq p, q < m$ e p, q coprimos com m. Defina a ação de $\mathbb{Z}_m = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ em $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ por:
$$[a] \cdot (z_1, z_2) = \left(\exp\left(\frac{2\pi aip}{m}\right) z_1, \exp\left(\frac{2\pi aiq}{m}\right) z_2\right)$$
   Definimos então o espaço lenticular associado $L_m(p, q) = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_m$. Mostrar que $L_m(p, q) = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_m$ possui uma única estrutura diferencial tal que $\pi : \mathbb{S}^3 \to L_m(p, q)$ é um difeomorfismo local.

   Comentário 1: Da para fazer uma construçao similiar para $\mathbb{S}^{2n-1} \subseteq \mathbb{C}^n$ e definir $L_m(p_1, \ldots, p_n)$.

   Comentário 2: $L_2(1, 1) = \mathbb{R}P^3$

6. (Garrafa de Klein) Seja em $\mathbb{R}^2$ a ação por $\mathbb{Z}^2$ dada por:
$$(m, n) \cdot (x, y) = ((-1)^n x + m, y + n)$$
   Defina $K = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, mostre que K possui uma única estrutura suave tal que $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ é difeomorfismo local. Mostre que, do mesmo modo que na esfera e o plano projetivo, existe um difeomorfismo local "2 a 1"suave $p : \mathbb{T}^2 \to K$.

   Dica: reparar que $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z})$

   Comentário 1: é mais frequente ver na literatura a garrafa de Klein definida como um quadrado cujo bordo é identificado de um modo específico, esta definiçao é analoga à nossa (veja o comportamento do quadrado $[0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ sob a ação definida acima).

   Comentário 2: reparar que a faixa de Mobius (definida na lista 1), é de fato $M = \mathbb{R} \times (-1, 1)/\mathbb{Z}$ por certa açao de $\mathbb{Z}$

7. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ suave e $p \in M$ um ponto crítico de f. Mostrar que está bem definido o Hessiano de f, isto é, existe um operador bilinear simétrico $H(f)_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ tal que em cartas (x, U) com $p \in U$ satisfaz:

$$H(f)_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\right) = \frac{\partial^2(f \circ x^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(x(p))$$

Comentário: Estudar este operador permite achar máximos locais, mínimos locais, ponto de sela, o índice do ponto, etc.

8. Seja $v \in \mathbb{S}^n$ e defina a função altura com respeito a v na esfera como

$$h = h_v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$$

$$h(x) = \langle x, v \rangle$$

Mostrar que h é suave e calcular seus ponto críticos.

Comentário: estudar este tipo de funções que nos permite entender a topologia das variedades, é tema central na teoria de Morse.

9. (Para quem gosta de algebra) Seja o ideal $I_p = \{f \in C^\infty(M) : f(p) = 0\}$ da algebra $C^\infty(M)$, mostrar que:

   (a) Seja $f \in I_p^2$ mostrar que $df_p(v) = 0$ para todo $v \in T_pM$

   (b) I_p/I_p^2 é um espaço vetorial de dimensao $n = \dim M$ (onde I_p^2 é o ideal quadrado)

   (c) Mostrar que $T : T_pM \to (I_p/I_p^2)^*$ dado por:

   $$T(v)(f + I_p^2) = df_p(v)$$

   define um isomorfismo linear (que não depende da base).

Comentário: Esse exercicio é importante na álgebra para definir o espaço tangente de uma variedade algébrica, mesmo sem ser suave.