Lista 1, Analise em variedades

Diego N. Guajardo

7 de dezembro de 2020

Vamos assumir sempre que M, N são variedades suaves($= C^\infty$), as vezes vamos denotar M^n para $n = \dim M$. Sempre que achar necessario, pode assumir que as variedades são conexas. Vamos denotar $M \cong N$ para dizer que M e N são difeomorfas. As vezes vou deixar exercicios do lee "introduction to smooth manifolds"segunda ediçao.

1. Mostrar que M é conexa se e somente se é conexa por caminhos.

2. (Reta com duas origens) Considere $M = (\mathbb{R} \times \{-1\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\}) \subseteq \mathbb{R}^2$ a uniao disjunta de duas retas e a seguinte relaçao de equivalencia: $(a, b) \sim (x, y)$ se, e somente se, $(x, y) = (a, b)$ ou $a = x \neq 0, y = -b$. Desenhe $X = M/\sim$ e mostre que com a topologia quociente dá para cobrir X com cartas é segundo contável mas X não é um espaço Hausdorff.

3. Seja X a união disjunta não enumerável de cópias de $\mathbb{R}$. Mostrar que X é localmente euclideano, Haussdorf mas não é segundo contável.

4. Seja $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ a esfera com a topologia usual. Sejam $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ dois atlas da esfera, o primeiro contém duas projeções estereográficas com respeito ao polo norte e sul, o segundo é formado por 6 cartas, $\phi_x^\pm, \phi_y^\pm, \phi_z^\pm$ onde o dominio de ϕ_x^+ é o hemisfério norte com respeito ao eixo x e dado por $\phi_x^x(a, b, c) = (b, c)$, ϕ_x^- é dado pela mesma fórmula mas com respeito o hemisfério sul, as otras cartas são definidas analogamente de acordo com os eixos correspondentes. Mostrar que os atlas $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são compatíveis.

   Dica: Por simetria, veja que é necessario verificar apenas para uma carta.

   Comentário: Na prática ninguem faz esse tipo de contas, todo mundo assume que tudo funciona, mas é bom fazer uma vez para se convencer.

5. Considere em $\mathbb{R}$ com a topologia usual os atlas $\mathcal{A}_1 = \{\phi_1(x) = x\}$ e $\mathcal{A}_2 = \{\phi_2(x) = x^3\}$. Mostrar que não são atlas compatíveis mas $\mathbb{R}_1 := (\mathbb{R}, \mathcal{A}_1)$ e $\mathbb{R}_2 := (\mathbb{R}, \mathcal{A}_2)$ são variedades difeomorfas.

6. Mostrar que $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ com a estrutura de varieade produto é difeomorfa a $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

7. Mostrar que $\mathbb{R}P^1 \cong \mathbb{S}^1 \cong SO(2)$

8. Seja em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ a seguinte relação de equivalencia: $v \sim w$ se existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $v = \lambda w$. Definimos o espaço projetivo complexo como $\mathbb{C}P^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ com a topologia quociente. Definimos $\phi_i : \mathbb{C}^n \to U_i \subseteq \mathbb{C}P^n$ por:

   $$\phi_i(z_1, \dots, z_n) = [z_1, \dots, z_{i-1}, 1, z_i, \dots, z_n]$$

   Defina bem o aberto U_i de modo que $\varphi_i = \phi_i^{-1}$ esteja bem definida e que $\mathcal{A} = \{(\varphi_i, U_i)\}$ é uma estrutura de variedade complexa para $\mathbb{C}P^n$ (variedade complexa=transição das cartas é holomorfa, que em particular é uma estrutura suave).

   Comentário: $\mathbb{C}P^n$ é uma variedade muito importante na geometria complexa e na geometria algébrica.

   Comentário: Dá para fazer a mesma construçao para os numeros quaternios e para os numeros reais, estas cartas ficam bem definidas nestes casos.

9. Mostrar que $\mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{S}^2$

   Comentário: Este exercicio mostra em particular que $\mathbb{S}^2$ possui uma estrutura complexa, que é a de esfera de Riemann. A única outra que talvez possua uma estrutura complexa é $\mathbb{S}^6$, mas é uma conjectura.

10. Forneça uma estrutura diferenciavel para a faixa de Mobius, que topologicamente é dado como o espaço quociente $M^2 = (\mathbb{R} \times (-1, 1))/\sim$ onde $(x, y) \sim (a, b)$ se e somente se existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = a + n$ e $y = (-1)^n b$.

    Considere $f : (\mathbb{R} \times (-1, 1)) \to \mathbb{R}^3$ dada por:

    $$f(x, y) = \big((1 + \frac{y}{2}\cos(\pi x))\cos(2\pi x), (1 + \frac{y}{2}\cos(\pi x))\sin(2\pi x), \frac{y}{2}\sin(\pi x)\big)$$

Verifique que existe um mapa injetivo suave $\hat{f} : M^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f = \hat{f} \circ \pi$ onde $\pi : \mathbb{R} \times (-1, 1) \to M^2$ é o mapa quociente.

Comentário: É tipico ver a faixa de Mobius como um quadrado com uma relacao de equivalencia no bordo, porem esta definicao dificulta a construcao cartas compativeis no bordo. Este exercicio mostra que é mais facil ver a faixa de Mobius como um quociente de um espaço maior.

Comentário: Muitas pessoas quando pensam na faixa de mobius pensam nesse mergulho dado pela $\hat{f}$, mas uma das graças de estudar variedades é que de fato nao é necessario ter um espaço ambiente para estuda-las. O mesmo acontece com os espaços projetivos e muitos outros, simplica muito deixar de pensar no espaco como mergulho e pensar como variedade.