Suavidade, zoom, e imersões

Luis A. Florit

https://luis.impa.br - luis@impa.br

A ideia de 'suavidade' de uma curva é bastante intuitiva. Porém, como acontece com frequência, quem se encontra com esta ideia por primeira vez tropeça com a sua formalização, pois esta parece um tanto obscura comparada com a intuição. O propósito aqui é chegar na definição formal através da noção intuitiva, e quase sem querer vendo o conceito de *imersão* surgir naturalmente.

Escolha uma curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{V}$ no plano real $\mathbb{V}$ (ou em $\mathbb{R}^n$, ou em qualquer $\mathbb{R}$-espaço vetorial se preferir). Queremos definir e determinar se α é 'suave' em, digamos, $0 \in \mathbb{R}$. Intuitivamente, podemos pensar que, perto de 0, isto quer dizer que

$$\textit{α se aproxima mais e mais a uma reta "ao fazer zoom" em $p = \alpha(0)$.} \tag{1}$$

Claro que esta ideia é vaga e portanto não é adequada para trabalhar com ela. Tentemos formalizá-la, e veremos que tem um detalhe sutil por trás.

Um caso muito particular de uma tal curva é uma reta por p de $\mathbb{V}$, isto é, a curva $r_v : \mathbb{R} \to \mathbb{V}$ dada por

$$r_v(t) = p + tv,$$

onde $v \in \mathbb{V}$, com $v \neq 0$. As retas são, claro, o exemplo máximo da nossa noção de suavidade. De fato, elas são até invariantes "ao fazer zoom" sobre elas. Formalizando, um *zoom de fator* $\lambda > 0$ *em* p é simplesmente a homotetia em p,

$$h_{\lambda,p}(x) = p + \lambda\,(x - p),$$

junto com a correspondente renormalização $t \mapsto t/\lambda = h^{-1}_{\lambda,0}(t)$ do tempo. Assim, temos obviamente a invariância:

$$h_{\lambda,p} \circ r_v \circ h^{-1}_{\lambda,0} = r_v, \quad \forall \lambda > 0.$$

O que (1) propõe então é que suavidade seja definida formalmente através da igualdade

$$\lim_{\lambda \to +\infty} (h_{\lambda,p} \circ \alpha \circ h^{-1}_{\lambda,0}) = r_v$$

pontualmente, para algum $v \neq 0$. Se este for o caso, para todo $t \neq 0$ temos que

$$v = \frac{1}{t}\left(\lim_{\lambda \to +\infty} (h_{\lambda,p} \circ \alpha \circ h^{-1}_{\lambda,0}(t)) - p\right) = \frac{1}{t}\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda(\alpha(t/\lambda) - p) = \lim_{s \to 0} \frac{\alpha(s) - \alpha(0)}{s} = \alpha'(0). \tag{2}$$

Em outras palavras, (1) é equivalente a α ser diferenciável no sentido usual.

Ou quase.

Pois, como $\alpha'(0) = v \neq 0$, a diferencial de α não pode se anular. De onde saiu isto?

É claro que poderíamos incluir a função constante $p = r_0$, isto é, $v = 0$, dentro da categoria das "retas". Aí a diferencial de α poderia se anular, mas isso cheira a trapaça. E é.

O ponto aqui é que a ideia intuitiva de suavidade em (1) refere-se implicitamente à *imagem* de α, enquanto que usamos α *como função* para chegar a sua diferencial em (2). A imagem de α perde a informação sobre a sua parametrização. Pior ainda, se permitirmos que $\alpha'(0)$ se anule, a imagem de α pode não parecer com uma reta perto do 0, em nenhuma escala. *Exercício: encontre uma curva infinitamente diferenciável no plano cuja imagem seja um "$\bigvee$".*

Esse é um dos motivos pelos quais costumamos trabalhar com curvas *regulares*, isto é, curvas diferenciáveis cuja diferencial não se anula em nenhum ponto. Mais geralmente, funções diferenciáveis cuja diferencial é sempre injetiva. Tais funções são chamadas de *imersões* e, pelo Teorema da Função Inversa, a própria função dá um difeomorfismo local entre o seu domínio e a sua imagem. É para elas que a suavidade intuitiva funciona.

Para finalizar, um detalhe. Observe que imersões não aparecem explicitamente ao trabalhar com a noção de suavidade intuitiva para funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. O motivo é que associamos instintivamente f com o seu gráfico, que é a curva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(t) = (t, f(t))$. Esta curva é de fato uma imersão já que $F'(t) = (1, f'(t)) \neq 0$, e portanto a ideia intuitiva de suavidade para f coincide com a noção de diferenciabilidade, sem restrições.