

# Análise em variedades

Luis Florit (luis@impa.br, sala 404)

Versão: 20180816.1313

Baixar a última versão daqui: <http://luis.impa.br/aulas/anvar/aulas.pdf>

**Bibliografia:** [Tu], [Sp], [Le], [Ha], [Hi], [Hr]...

## §1. Variedades

Queremos fazer cálculo: objeto precisa ser *localmente* um espaço vetorial. *Exemplo:*  $\mathbb{S}^n$ .

Espaço topológico, vizinhança, cobrimento.

Base enumerável.

Hausdorff ( $T_2$ ).

**OBS:** Base enumerável e Hausdorff são herdados por subespaços.

Espaço topológico localmente Euclideano: cartas, coordenadas.

Dimensão, notação:  $\dim M^n = n$ .

Variedade topológica = Espaço topológico + localmente Euclideano + Base enumerável + Hausdorff.

*Exemplos:*  $\mathbb{R}^n$ , gráficos, cúspide. Não é variedade: '  $\times$  '.

Cartas ( $C^\infty$ -)compatíveis, funções de transição, atlas ( $C^\infty$ ).

*Exemplo:*  $\mathbb{S}^n$ .

Estrutura diferenciável = Atlas maximal.

Variedade = Variedade diferenciável = Variedade topológica + Atlas maximal.

*Exemplos:*  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{S}^n$ ,  $U \subset M^n$ ,  $GL(n, \mathbb{R})$ , gráficos, var. produto.

## §2. Funções diferenciáveis entre variedades

Definição, composição, difeomorfismo, difeomorfismo local.

*Exemplos:* função a e desde produto.

Derivadas parciais, matriz Jacobiana, Jacobiano.

Grupos de Lie, exemplos:  $Gl(n, \mathbb{R})$ ,  $\mathbb{S}^1$ ,  $\mathbb{S}^3$ .

Translações a esquerda e direita em  $G : L_g, R_g$ .

## §3. Quocientes

*Exercício:* Mostre que em qualquer quociente de espaço topológico existe uma única estrutura topológica mínima, chamada *topologia quociente*, tal que a projeção é continua (i.e., a *topologia final de  $\pi$* ). Mas o quociente de uma variedade não necessariamente é uma variedade...

*Exemplos:* Faixa Möbius,  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ,  $[0, 1]/\{0, 1\} = \mathbb{S}^1$ .

Relações de equiv. abertas:  $X$  tem base enum.  $\Rightarrow X/\sim$  tem, e  $\{(x, y) \in X \times X : x \sim y\}$  é fechado  $\Rightarrow X/\sim$  é Hausdorff.

*Exemplo:*  $\mathbb{R}P^n$ .

Uma ação propriamente descontínua  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  satisfaz:

- 1)  $\forall p \in M, \exists U_p \subset M$  tal que  $(g \cdot U_p) \cap U_p = \emptyset, \forall g \in G \setminus \{e\}$ ,
- 2)  $\forall p, q \in M$  em órbitas diferentes,  $\exists U_p, U_q \subset M$  tais que  $(G \cdot U_p) \cap U_q = \emptyset$  (precisa desta condição para garantir Hausdorff).

## §4. Espaço tangente

Germes de funções:  $\mathcal{F}_p(M) = \{f : U \subset M \rightarrow \mathbb{R} : p \in U\} / \sim$

$T_p M, x : U_p \subset M^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  carta  $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \in T_p M, 1 \leq i \leq n$ .

Diferencial de funções  $\Rightarrow$  regra da cadeia.

$f$  difeomorfismo local  $\Rightarrow f_{*p}$  isomorfismo  $\Rightarrow$  a dimensão é preservada por difeomorfismos locais.

*Recíproca:* Teorema da função inversa (*tem* que valer!).

Como toda carta  $x$  é difeomorfismo com imagem e como

$$x_{*p}(\partial/\partial x_i|_p) = \partial/\partial u_i|_{x(p)} \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

então  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\}$  é base de  $T_pM \Rightarrow \dim T_pM = \dim M$ .  
Expressão local da diferencial.

Curvas: velocidade, expressão local.

Diferencial usando curvas: todo vetor é derivada de curva.

**OBS:**  $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ : se  $f \in \mathcal{F}_p(U)$ ,  $v \in T_pM$ , então  $f_{*p}(v) = v(f)$ .

Imersão, submersão, mergulho. Posto.

*Exemplos:* projeções e injeções em produtos de variedades.

Identificação do espaço tangente do produto de variedades:

$$T_pM \times T_{p'}M' \cong T_{(p,p')}(M \times M').$$

**Definição 1.** Um ponto  $p \in M$  se diz um *ponto crítico* de  $f : M \rightarrow N$  se  $f_{*p}$  não for sobrejetiva. Caso contrario,  $p$  se diz *ponto regular*. Um ponto  $q \in N$  é um *valor crítico* de  $f$  se for imagem de *algum* ponto crítico. Caso contrário, é um *valor regular* de  $f$  (em particular,  $q \in N, q \notin \text{Im}(f) \Rightarrow q$  é valor regular de  $f$ ).

## §5. Subvariedades

Subvariedades regulares  $S \subset M$ , cartas adaptadas  $\varphi_S$ .

Codimensão. Topologia.

*Exemplos:*  $\sin(1/t) \cup I$ ; pontos e abertos.

As  $\varphi_S$  dão atlas de  $S$ .

Funções diferenciáveis desde e para subvariedades regulares.

Conjuntos de nível:  $f^{-1}(q)$ . Conjuntos de nível regulares.

*Exemplos:*  $\mathbb{S}^n$ ,  $SL(n, \mathbb{R})$ : usar curva  $t \mapsto \det(tA)$  !!

**Teorema 2.** *Se  $q \in \text{Im}(f) \subset N^n$  é um valor regular de  $f : M^m \rightarrow N^n$ , então  $f^{-1}(q) \subset M^m$  é uma subvariedade regular de  $M^m$  de dimensão  $m - n$ .*

*Prova:* Seja  $p \in M^m$  com  $f(p) = q$  e cartas locais  $(x, U)$  e  $(y, V)$  em  $p$  e  $q$ . Podemos supor que  $y(q) = 0$ ,  $f(U) \subset V$  e que  $\text{span}\{f_{*p}(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p) : i = 1, \dots, n\} = T_q N$ . Defina  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  por  $\varphi = (y \circ f, x_{n+1}, \dots, x_m)$ . Então, como  $\varphi_{*p}$  é um isomorfismo, existe  $U' \subset U$  tal que  $x' = \varphi|_{U'} : U' \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma carta de  $M^m$  em  $p$ . Além disso, como  $y \circ f \circ x'^{-1} = \pi_n$ , temos que  $f^{-1}(q) \cap U' = \{r \in U' : x'_1(r) = \dots = x'_n(r) = 0\}$ . Logo,  $x'$  é uma carta adaptada a  $f^{-1}(q)$ . ■

*Exercício:* Adaptando a prova do Teorema 2, prove o seguinte: Seja  $f : M^m \rightarrow N^n$  uma função que tem posto constante  $k$  numa vizinhança de  $p \in M$ . Então existem cartas em  $p$  e em  $f(p)$  tais que a expressão de  $f$  nessas coordenadas é dada por

$$\pi_k := (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Obtenha disto a forma normal das imersões e submersões.

*Exercício:* Conclua do exercício anterior que, se  $f$  tem posto  $\text{cte} = k$  numa vizinhança  $U$  de  $f^{-1}(q) \neq \emptyset$ , então  $U \cap f^{-1}(q)$  é uma subv. regular de  $M^m$  de dim  $m - k$ .

*Exemplo:*  $f : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ ,  $f(A) = AA^t$  tem posto constante  $n(n+1)/2$  (pois  $f \circ L_C = L_C \circ R_{C^t} \circ f \ \forall C$ )  $\Rightarrow O(n)$  subvariedade dimensão  $n(n-1)/2$  (não precisava posto constante, basta ver que  $\text{Im}(f) \subset \text{Sim}(n, \mathbb{R})$  e  $I$  é valor regular).

**OBS:** Como “*ter posto máximo*” é uma condição aberta, se uma função  $f$  é uma imersão (ou uma submersão) num ponto  $p$ , então é uma imersão (ou uma submersão) numa vizinhança de  $p$ .

$SL(n, \mathbb{R}), SO(n), O(n), \mathbb{S}^3, U(n), \dots$  são todos grupos de Lie. Subvariedades imersas e mergulhadas. Figura 8.

Identificar:  $p \in S \subset M \Rightarrow T_p S \subset T_p M; S \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow T_p S \subset \mathbb{R}^n$ .

## §6. Fibrado tangente, fibrados vetoriais, fibrados

Estrutura topológica e diferenciável de  $TM$ .

$\pi : TM \rightarrow M$ . Campos de vetores sobre  $M$ :

$$\mathcal{X}(M) = \{X : M \rightarrow TM : \pi \circ X = \text{Id}_M\}.$$

Diferenciabilidade, estrutura de módulo de  $\mathcal{X}(M)$ .

Campos de vetores em  $M \cong$  Derivações em  $M$ :

$$\mathcal{D}(M) = \{X \in \text{End}(\mathcal{F}(M)) : X(fg) = X(f)g + fX(g)\}.$$

Colchete:  $\mathcal{X}(M)$  é álgebra de Lie:  $[\cdot, \cdot]$  é bilinear, antisimétrico e satisfaz identidade de Jacobi.

Dada  $f : M \rightarrow N \Rightarrow$  campos  $f$ -relacionados:  $\mathcal{X}_f$

Campos ao longo de  $f$ : expressão local.

Curvas integrais, fluxo local e Teorema Fundamental EDO.

Fibrados vetoriais, trivializações locais.  $TM$ .

Fibrado trivial, fibrado produto.

Soma de Whitney de fibrados vetoriais.

Pull-back de fibrados vetoriais:  $f^*(E)$ .

Aplicações de fibrados. *Exemplo*:  $f_* : TM \rightarrow TN$ .

Seções. Smooth Frames. Diferenciabilidade.

Fibrado cotangente:  $T^*M, \{dx_i, i = 1, \dots, n\}$ .

Fibrados gerais e  $G$ -fibrados. Redução.

## §7. Partições da unidade

Suporte de funções. Bump functions.

Extensões globais de campos e funções  $C^\infty$  locais.

Partições da unidade subordinadas a cobrimentos.

Existência de partições da unidade para variedades compactas.

*Aplicação:* Existência de métricas Riemannianas.

*Aplicação:* Teorema(s) de mergulho de Whitney (prova aqui).

*Exercício:* Ler (e entender!) a prova da existência de partições da unidade em geral (melhor que no Tu, ver aqui).

## §8. Orientação

Orientabilidade... fibrado! *Exemplo:*  $TM$  é orientável.

Faixa de Moebius: truque papel, nó: top. intrínseca vs extrínseca.

## §9. 1-formas diferenciais

$\Omega^1(M) = \Gamma(T^*M) = \{w : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)/w \text{ é } \mathcal{F}(M)\text{-linear}\}$ :  
operador local  $\Rightarrow$  operador pontual  $\Rightarrow \mathcal{F}(M)$ -linear.

$f \in \mathcal{F}(M) \Rightarrow df \in \Omega^1(M)$ , e  $df \cong f_*$ .

$(x, U)$  carta  $\Rightarrow \{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\}$  é base  $T_pM$  cuja base dual é  $\{dx_1|_p, \dots, dx_n|_p\}$  (i.e., base de  $T_p^*M$ ).

$\{dx_1, \dots, dx_n\}$  são então um frame de  $T^*U$ : expressão local.

*Exemplo:* Forma de Liouville em  $T^*M$ :  $\lambda(w) := w \circ \pi_{*w}$ .

Pull back:  $\varphi \in \text{End}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \Rightarrow \varphi^* \in \text{End}(\mathbb{W}^*, \mathbb{V}^*)$ ;

$f : M \rightarrow N \Rightarrow f^* : \mathcal{F}(N) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ ;  $f^* : \Omega^1(N) \rightarrow \Omega^1(M)$ .

Importância do pull-back!

Restrição de 1-formas a subvariedade  $i : S \rightarrow M$ :  $w|_S = i^*w$ .

## §10. Álgebra multilinear

Sejam  $\mathbb{V}$  e  $\mathbb{V}'$   $\mathbb{R}$ -espaços vetoriais.  $\mathbb{V}^* = \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ .

Funções bi/multi lineares em espaços vetoriais:  $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ .

Tensores e  $k$ -formas em  $\mathbb{V}$ :  $\text{Bil}(\mathbb{V} \times \mathbb{V}) = (\mathbb{V} \otimes \mathbb{V})^* = \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^*$ .

$\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}', \mathbb{V} \wedge \mathbb{V}, \wedge^0 \mathbb{V} = \mathbb{V}^{\otimes 0} := \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{V}^{\otimes k} := \mathbb{V} \otimes \cdots \otimes \mathbb{V}, \quad \dim \mathbb{V}^{\otimes k} = (\dim \mathbb{V})^k$$

$$\wedge^k \mathbb{V} := \mathbb{V} \wedge \cdots \wedge \mathbb{V} \subset \mathbb{V}^{\otimes k}, \quad \dim \wedge^k \mathbb{V} = \binom{\dim \mathbb{V}}{k}$$

Operadores  $\otimes$  e  $\wedge$  (bil. e assoc.) sobre aplicações multilineares:

$$\sigma \in \wedge^k \mathbb{V}, \omega \in \wedge^s \mathbb{V} \Rightarrow \omega \wedge \sigma := \frac{1}{k!s!} A(\omega \otimes \sigma) \in \wedge^{(k+s)} \mathbb{V}$$

**OBS:**  $\omega \wedge \sigma = (-1)^{ks} \sigma \wedge \omega$ .

## §11. $k$ – formas diferenciais e campos tensoriais

A álgebra multilinear estende-se a fibrados vetoriais:  $\text{Hom}(E, E')$

*Exemplos:*  $T^*M$ ; métrica Riemanniana:  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_U = \sum g_{ij} dx_i \otimes dx_j$

Campos tensoriais (tensores) e  $k$ -formas (diferenciais):

$$\mathcal{X}^k(M^n), \quad \Omega^k(M^n)$$

são simplesmente as seções dos fibrados  $(T^*M)^{\otimes k}, \quad \wedge^k(T^*M)$ .

Tensores = aplicações  $\mathcal{F}(M)$ -multilineares (bump-functions).

**OBS:**  $\Omega^0(M) = \mathcal{X}^0(M) = \mathcal{F}(M), \quad \Omega^1(M) = \mathcal{X}^1(M)$ .

Notação:  $\mathcal{J}_{k,n} := \{(i_1, \dots, i_k) : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ , e para  $I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{J}_{k,n}$ ,  $dx_I := dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ .

Expressões locais:

$$df_1 \wedge \cdots \wedge df_n = \det([\partial f_i / \partial x_j]_{1 \leq i, j \leq n}) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \quad (1)$$

e, para  $J = (j_1, \dots, j_k) \in \mathcal{J}_{k,n}$  e  $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{F}(M)$ ,

$$dy_J = \sum_{I \in \mathcal{J}_{k,n}} \det(A_{JI}) dx_I, \quad \text{onde } A_{JI} = \left[ \frac{\partial y_{j_r}}{\partial x_{i_s}} \right]_{1 \leq r, s \leq k}.$$

Operador  $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^s(M) \rightarrow \Omega^{k+s}(M)$  bilinear, tensorial

$$\Omega^\bullet(M) := \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$$

é uma *álgebra graduada* com  $\wedge$ .

Pull back de tensores e formas: linear, tensorial, respeita  $\wedge$ :

$$F^* f := f \circ F, \quad \forall f \in \mathcal{F}(M),$$

$$F^*(\omega \wedge \sigma) = F^*\omega \wedge F^*\sigma,$$

$$(F \circ G)^* = G^* \circ F^*.$$

## §12. Orientação e n – formas

*Lembrar:* Se  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$  são bases de  $\mathbb{V}^n$ ,  $\beta(v_1, \dots, v_n) = \det C(B, B')\beta(v'_1, \dots, v'_n)$ ,  $\forall \beta \in \Lambda^n(\mathbb{V}^n)$ .

Dizemos que  $\beta$  *determina a orientação*  $[B]$  se  $\beta(v_1, \dots, v_n) > 0$ .

**OBS:**  $M^n$  orientável  $\Leftrightarrow$  existe  $\beta \in \mathcal{V}$ , onde

$$\mathcal{V} = \{\sigma \in \Omega^n(M^n) : \sigma(p) \neq 0, \forall p \in M^n\}.$$

Orientações de  $M \cong \mathcal{V}/\mathcal{F}_+(M)$ .

Difeos que preservam/revertem orientação.



### §13. Derivada exterior: VIP!!

**Definição 3.** A *derivada exterior* em  $\Omega^\bullet(M)$  é a aplicação linear  $d : \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$  que satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $d(\Omega^k(M)) \subset \Omega^{k+1}(M)$ ;
2.  $f \in \mathcal{F}(M) = \Omega^0(M) \Rightarrow df(X) = X(f), \forall X \in \mathcal{X}(M)$ ;
3.  $\forall \omega \in \Omega^k(M), \sigma \in \Omega^\bullet(M) \Rightarrow d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma$ ;
4.  $d^2 = 0$ .

**OBS:** Props (2) + (3) + bump func.:  $\omega|_U = 0 \Rightarrow d\omega|_U = 0$ . Logo,  $d\omega|_U = d(\omega|_U)$ , e podemos fazer contas localmente.

**OBS:** Props (3) + (4) + indução  $\Rightarrow d(df_1 \wedge \cdots \wedge df_k) = 0$ .

**OBS:**  $d$  existe e é única: expressão em coordenadas.

Para toda  $F : M \rightarrow N$  vale que (ver primeiro para  $\Omega^0$ ):

$$\boxed{F^* \circ d = d \circ F^*}$$

i.e.,  $F^* : \Omega^\bullet(N) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$  é um morfismo de álgebras diferenciais graduadas (i.e., preserva grau e comuta com  $d$ ).

**OBS:** Isto também explica o porquê de  $d\omega|_U = d(\omega|_U)$  via *inc\**.

*Exercício:*  $\forall k, \forall \omega \in \Omega^k(M), \forall Y_0, \dots, Y_k \in \mathcal{X}(M)$ ,

$$\begin{aligned} d\omega(Y_0, \dots, Y_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i Y_i \omega(Y_0, \dots, \hat{Y}_i, \dots, Y_k) \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j], Y_0, \dots, \hat{Y}_i, \dots, \hat{Y}_j, \dots, Y_k). \end{aligned}$$

Dado  $X \in \mathcal{X}(M)$  definimos a *multiplicação interior*

$$i_X : \Omega^{k+1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)$$

por  $(i_X\omega)(Y_1, \dots, Y_k) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_k)$ .

1)  $i_X\omega$  é tensorial (=  $\mathcal{F}(M)$ -bilinear) em  $X$  e em  $\omega$ .

2)  $\forall \omega \in \Omega^k(M), \sigma \in \Omega^r(M)$ ,

$$i_X(\omega \wedge \sigma) = (i_X\omega) \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge (i_X\sigma).$$

3)  $i_X \circ i_X = 0$ .

## §14. Variedades com bordo

Funções  $C^\infty$  e difeos sobre subconjuntos arbitrários  $S \subset M^n$ .

**Proposição 4.** *Seja  $U \subset M^n$  aberto,  $S \subset \hat{M}^n$  arbitrário, e  $f : U \rightarrow S$  um difeomorfismo. Então,  $S$  é aberto em  $\hat{M}^n$ .*

**Corolário 5.** *Sejam  $U$  e  $V$  abertos de  $\mathcal{H}^n := \mathbb{R}_+^n = \{x_n \geq 0\}$  e  $f : U \rightarrow V$  um difeomorfismo. Então  $f$  leva pontos interiores (resp. de bordo) em pontos interiores (resp. de bordo).*

Variedade com bordo: definição. (Vaga idéia de *orbifold*).

Pontos interiores.

Bordo de  $M = \partial M$  é variedade de dimensão  $\dim(M) - 1$ .

$\partial M$  vs bordo topológico.

Se  $p \in \partial M$ :  $\mathcal{F}_p(M)$ ,  $T_p^*M$ ,  $v \in T_pM$  (mas pode não existir curva com  $\alpha'(0) = v$ ),  $TM$ , orientação: tudo igual que antes.

Se  $p \in \partial M$ :  $v \in T_pM$  interiores e exteriores.

**OBS:** Numa variedade com bordo  $M$ , considerando a inclusão  $inc : \partial M \rightarrow M$  existe um campo exterior  $X$  ao longo de  $\partial M$  ( $X \in \mathcal{X}_{inc}$ ). Logo,  $\partial M$  é orientável se  $M$  for, com uma orientação induzida dada por  $inc^*i_X\omega$ .

*Exemplos:*  $\mathcal{H}^n, [a, b]; B^n, \overline{B}^n$ .

*Exemplo:* Se  $j = inc : \mathbb{S}^{n-1} = \partial \overline{B^n} \rightarrow \overline{B^n}$ ,  $Z(p) = p \in \mathcal{X}_{inc}$  é exterior  $\Rightarrow$  orientação  $\sigma$  em  $\mathbb{S}^{n-1} \subset \overline{B^n}$  via  $\overline{B^n} \subset \mathbb{R}^n$  e  $dv_{\mathbb{R}^n}$ :

$$\sigma = j^*(i_Z dv_{\mathbb{R}^n}) = \sum_i (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n. \quad (2)$$

## §15. Integração (Riemann)

Formas de sup. compacto =  $\Omega_c^\bullet(M)$ : preservadas por pullbacks. Se  $\omega \in \Omega_c^n(U)$ ,  $U \subset \mathcal{H}^n$ , temos  $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$  e definimos

$$\int_U \omega = \int_{\mathcal{H}^n} \omega := \int_{\mathcal{H}^n} f dx.$$

Pode fazer o mesmo para  $w$   $n$ -forma contínua em  $U$ ,  $A \subset U$  limitado com bordo de medida nula (e.g.,  $A =$  cubo)  $\Rightarrow \int_A \omega$ .

$\xi : U \subset \mathcal{H}^n \rightarrow V \subset \mathcal{H}^n$  é difeo, e  $\epsilon = 1$  (resp.  $-1$ ) se  $\xi$  preserva (resp. reverte) orientação, (1) e T. de mudança de variáveis  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_U \xi^* \omega &= \int_U \xi^*(f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) \\ &= \int_U f \circ \xi (\xi^* dx_1 \wedge \cdots \wedge \xi^* dx_n) \\ &= \int_U f \circ \xi (d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n) \\ &= \int_U f \circ \xi \det(J_\xi) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \epsilon \int_V \omega. \end{aligned}$$

**Def.:** Se  $M^n$  está orientada,  $\varphi : U \subset M^n \rightarrow \mathcal{H}^n$  carta orientada, e  $w \in \Omega_c^n(U)$ , definimos  $\int_U \omega = \int_M \omega := \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* w$ . Linear!

**Def.:**  $M^n$  orientada,  $w \in \Omega_c^n(M^n) \Rightarrow \int_M \omega := \sum_\alpha \int_M \rho_\alpha w$ .

TMV:  $\int_N \varphi^* \omega = \int_M \omega$ ,  $\forall \varphi \in Dif_+(N, M)$ ,  $\forall w \in \Omega_c^n(M^n)$ .

$M^n$  orientada, temos o operador linear:  $\omega \in \Omega_c^n(M^n) \mapsto \int_M \omega$ .  
 O caso  $\dim M = 0$ :  $\int_M f = \sum_i f(p_i) - \sum_j f(q_j)$ .  
 $\int_{-M} \omega = - \int_M \omega$ .

## §16. Teorema de Stokes, versão 1.0

**Teorema 6 (Stokes).**  $M^n$  orientada,  $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M^n) \Rightarrow$

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

*Idéia subjacente:* Somar integrais em cubos pequenos, que as faces interiores cancelam devido à orientação (ver dim 1 e 2).

**Cor.:**  $M^n$  compacta orientada  $\Rightarrow \int_M d\omega = 0$ ,  $\forall \omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$ .

*Exercício:* Os teoremas clássicos do cálculo seguem de Stokes.

**OBS (!!):**  $i : N^k \subset M$ ,  $N^k$  sub.reg. compacta orientada, e  $\omega \in \Omega^k(M)$  (ou  $N^k$  orientada e  $\omega \in \Omega_c^k(M)$ )  $\Rightarrow \int_N \omega (= \int_N i^* \omega)$ .  
 Se  $\rho \in Dif_+(N^k) \Rightarrow \int_N \rho^* \omega = \int_N \omega \Rightarrow$  só interessa o valor na imagem  $i(N)$ . Notação:  $\int_i \omega := \int_N i^* \omega$ .

Faz sentido para qualquer função diferenciável  $i$ :  $\int_i \omega$  (mesmo para  $M$  não orientável!), e  $\int_{i \circ \rho} \omega = \int_i \omega$  (só interessa  $i(N)$ ).

*Curiosidade: Teorema de Palais.* Seja  $D : \Omega^k \rightarrow \Omega^r$  tal que  $Df^* = f^*D$ , para toda  $f : M \rightarrow N$ .

Então, ou  $k = l$  e  $D = cId$ , ou  $r = k + 1$  e  $D = cd$ , ou  $k = \dim M$ ,  $r = 0$ , e  $D = c \int_M$ .

## §17. Outra forma de integrar (Spivak V.1 cap 8)

Se  $I^k : [0, 1]^k \hookrightarrow \mathbb{R}^k$  é  $k$ -cubo,  $c : [0, 1]^k \rightarrow M$  é  $k$ -cubo singular.

$c$   $k$ -cubo singular,  $\omega \in \Omega^k(M) \Rightarrow \int_c \omega := \int_{[0,1]^k} c^* \omega$ .

$C_k(M) = C_k(M; G) := k$ -cadeias de  $M = G$ -módulo livre sobre os cubos singulares, para  $G = \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{Q}$  ou  $\mathbb{Z}_2$  ou...).

$\int : C_k(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$  está definido  $\forall M$  e é bilinear!  
 $I_{i,\alpha}^n(x_1, \dots, x_{n-1}) := I^n(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha, x_i, \dots, x_{n-1}), \alpha = 0, 1.$

$c_{i,\alpha} := c \circ I_{i,\alpha}^n, \partial c = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} c_{i,\alpha}$  (desenho dim 2).

Extender linearmente  $\partial: C_k(M) \rightarrow C_{k-1}(M): \partial c = \text{bordo de } c.$

**Defs:**  $c \in C_k(M)$  é *fechada* se  $\partial c = 0$ ;  $c$  é um *bordo* se  $c = \partial \tilde{c}$ .

*Exemplos:*  $c_1, c_2$  1-cubos.  $c_1$  fechado  $\Leftrightarrow c_1(0) = c_1(1)$ ;  $c = c_1 - c_2$  é fechada  $\Leftrightarrow c_1(0) = c_2(0)$  e  $c_1(1) = c_2(1)$ , ou  $c_1$  e  $c_2$  fechados.

Como  $(I_{i,\alpha}^n)_{j,\beta} = (I_{j+1,\beta}^n)_{i,\alpha} \forall 1 \leq i \leq j \leq n-1 \Rightarrow \boxed{\partial^2 = 0}$ .

O que provamos no Teorema 6 na verdade é o seguinte:

**Teorema 7 (Stokes, versão 2.0).** Para toda variedade diferenciável  $M$ ,  $w \in \Omega^{k-1}(M)$ , e  $c \in C_k(M)$ , temos que

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Logo,  $\partial$  nas  $k$ -cadeias (sobre  $\mathbb{R}$ ) é o dual (com relação a  $\int$ ) de  $d$ . Vale tudo igual considerando  $k$ -simplex em lugar de  $k$ -cubos.

*FAZER EXERCÍCIOS DOS CAP. 8 E 11 DO SPIVAK!!*

## §18. Cohomologia de de Rham (Spivak, v1 cap8)

Se  $w \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ , quando  $w = df$  para certa  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ? Condição necessária:  $dw = 0$ . É suficiente?? SIM: pegando 1-cubo singular  $c, c(0) = 0, c(1) = p$ , definimos  $f(p) = \int_c w$ . Bem definida por Stokes(!), já que toda curva fechada em  $\mathbb{R}^n$  é bordo. De fato,  $c_s(t) = sc_1(t) + (1-s)c_0(t)$ . Ou seja, a solução de uma EDPs tem a ver com a *topologia* do espaço.

Lema de Poincaré (veremos depois):  $Z^k(\mathbb{R}^n) = B^k(\mathbb{R}^n)$ .

Localmente: sempre dá, mas globalmente *depende da topologia!*

Sistemas EDP lineares: Condição de integrabilidade.

Obstruções p/resolver EDPs, ou globalizar certos objetos locais.

$$Z^k(M) := \text{Ker } d_k = \text{Formas fechadas (condição local)}$$

$$B^k(M) := \text{Im } d_{k-1} = \text{Formas exatas (condição global!)}$$

**Definição:** A  $k$ -ésima *cohomologia de de Rham* da variedade  $M$  (com ou sem bordo) é

$$H^k(M) := Z^k(M)/B^k(M).$$

$H^0(M) = \mathbb{R}^r$ , onde  $r = \#$  componentes conexas de  $M$ .

$H^n(M^n) \neq 0$  se  $M^n$  é variedade compacta e orientável (Stokes).

$H^{n+k}(M^n) = 0, \forall k \geq 1$ .

*Ex:*  $\dim H^k(T^n) \geq \binom{n}{k}$ : se  $\omega_I := [d\theta_{i_1} \wedge \dots \wedge d\theta_{i_k}] \Rightarrow \int_{T_J} \omega_I = \delta_J^I$ .

Pull-back:  $F : M \rightarrow N \Rightarrow F^*(= F^\#) : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ .

$(F \circ G)^* = G^* \circ F^* \Rightarrow H^k(M)$  invariante da est. diferenciável(!).

$\wedge : H^k(M) \times H^r(M) \rightarrow H^{k+r}(M), [\omega] \wedge [\sigma] := [\omega \wedge \sigma]$  (boa).

$H^\bullet(M) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^k(M)$  é o *anel de cohomologia de  $M$* .

De fato,  $H^\bullet(M)$  é uma *álgebra graduada anticomutativa*, e  $F^*$  é um homomorfismo de álgebras graduadas.

## §19. Invariância por homotopia (Spivak, v1 cap8)

**Definição 8.** Dadas duas variedades (com ou sem bordo)  $M$  e  $N$ , dizemos que  $f, g : M \rightarrow N$  são (*diferenciavelmente*) *homotópicas* se existe uma função suave  $T : M \times [0, 1] \rightarrow N$  tal que  $T_0 := T \circ i_0 = f, T_1 := T \circ i_1 = g$ , onde  $i_s(p) = (p, s)$ .

É relação de equivalência nas funções:  $f \sim g$ .

*Exemplo:*  $M$  é contrátil  $\Leftrightarrow Id_M \sim cte$ .

**Proposição 9.** *Se  $M$  é uma variedade com ou sem bordo, para todo  $k$  existe uma aplicação linear  $\tau : \Omega^k(M \times [0, 1]) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$  (chamada de homotopia de cocadeias) tal que*

$$i_1^* \omega - i_0^* \omega = d\tau\omega + \tau d\omega, \quad \forall \omega \in \Omega^k(M \times [0, 1]).$$

*Prova:* Defina  $\tau(\omega) = \int_0^1 i_s^*(i_{\partial/\partial t}(\omega)) ds$ . Basta ver dois casos (identifiquemos via  $\pi_1^*$  e  $\pi_2^*$ ). Se  $\omega = f dx_I$ ,  $d\omega = \dots + (\partial f / \partial t) dt \wedge dx_I$ , e portanto é o TFC. Se  $\omega = f dt \wedge dx_I$ , então  $i_1^* \omega = i_0^* \omega = 0$ , e continua  $\Rightarrow d\tau\omega + \tau d\omega = 0$ . ■

Mais do que diferenciável:  $H^\bullet(M)$  é um invariante homotópico:

**Teorema 10 (!!!!!).**  $f \sim g \Rightarrow f^* = g^*$  (em  $H^\bullet(M)$ ).

*Prova:* Imediata da Proposição 9. (O mesmo vale para a homologia singular: ver Teorema 2.10 pag 111 em [Ha] e a prova). ■

**Corolário 11.**  $M$  *contrátil*  $\Rightarrow H^k(M) = 0, \forall k \geq 1$ .

**Corolário 12.** (*Lema de Poincaré*)  $Z^k(\mathbb{R}^n) = B^k(\mathbb{R}^n) \forall k \geq 1$ .

**Corolário 13.**  $M^n$  *comp. orient.*  $n \geq 1 \Rightarrow M^n$  *não contrátil*.

**Definição 14.**  $f : M \rightarrow N$  é uma *equivalência homotópica* se existe  $g : N \rightarrow M$  tal que  $g \circ f \sim Id_M$  e  $f \circ g \sim Id_N$ . Nesse caso, dizemos que  $M$  e  $N$  são *homotopicamente equivalentes*, ou que  $M$  e  $N$  *tem o mesmo tipo homotópico*:  $M \sim N$ .

**Corolário 15 (!!!!!).** *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma equivalência homotópica entre variedades com ou sem bordo. Então  $f^* : H^\bullet(M) \rightarrow H^\bullet(N)$  é um isomorfismo.*

**Corolário 16.** *Se  $M$  possui bordo, então  $H^\bullet(M) = H^\bullet(M^\circ)$ .*

**Definição 17.** Um *retrato* de  $M$  a uma subvariedade  $S \subset M$  é uma função  $f : M \rightarrow S$  tal que  $f|_S (= f \circ inc_S) = Id_S$ .  $S$  é chamado de *retrato* de  $M$  ( $\Rightarrow f^*$  é injetiva, e  $inc_S^*$  é sobre).

**Teorema 18** (do ponto fixo de Brouwer). *Se  $B \subset \mathbb{R}^n$  é uma bola fechada (ou conjunto compacto convexo), então toda função contínua  $f: B \rightarrow B$  possui pontos fixos.*

*Exercício.* Provar que se  $M$  é compacta e orientável não existe retração  $f : M \rightarrow \partial M$ .

**Definição 19.** Um *retrato por deformação* de  $M$  a  $S \subset M$  é uma função  $T : M \times [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $T_0 = Id_M$ ,  $Im(T_1) \subseteq S$ , e  $T_1|_S = Id_S$  (i.e., retrato  $T_1 \sim T_0 = Id_M \Rightarrow T_1^*$  e  $inc_S^*$  são iso).

Em outras palavras, um retrato por deformação é uma homotopia entre retrato de  $M$  a  $S$  e a identidade de  $M$ . Em particular, se  $S$  é um retrato por deformação de  $M$ , então  $M \sim S$ .

**Corolário 20.** *Se  $E$  é um fibrado vetorial sobre  $M$ , então  $H^\bullet(E) = H^\bullet(M)$ .*

*Aplicação: Vizinhanças tubulares.* Dada  $N \subset M$  uma subvariedade compacta e mergulhada, para cada  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  existe aberto  $N \subset V_\epsilon \subset M$ , tais que  $N$  é um retrato por deformação de  $V_\epsilon$ ,  $V_\epsilon \subset V_{\epsilon'}$  se  $\epsilon < \epsilon'$ ,  $\cap_\epsilon V_\epsilon = N$ . (Prova: usar o teorema de Whitney para  $M$ , ou métricas Riemannianas; ver Teorema 5.2 em [Hr]). Em particular,  $H^\bullet(V_\epsilon) = H^\bullet(N)$ .

**Definição 21.** Um *retrato por deformação forte* é um retrato por deformação  $T$  como na Definição 19 tal que  $T_t|_S = Id_S$ ,  $\forall t \in [0, 1]$  (e.g,  $H$  embaixo).

*Exemplo:*  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim \mathbb{S}^{n-1} \not\sim \mathbb{R}^n$ :  $H(x, t) = ((1 - t) + t/\|x\|)x$ .

*Exemplo:* Faixa Möbius  $F \sim \mathbb{S}^1$  ( $\Rightarrow H^2(F) = 0$ ).



## §20. Integrando em cohomologia: grau (Spivak, v1 cap8)

Para  $M$  não compactas (e sem bordo) trabalhamos também com

$$H_c^k(M) := Z_c^k(M)/B_c^k(M), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**OBS:**  $M^n$  orientável  $\Rightarrow \int : H_c^n(M^n) \rightarrow \mathbb{R}$  bem definida e linear.

**Teorema 22.** *Se  $M^n$  é variedade conexa e orientável, então  $\int : H_c^n(M^n) \rightarrow \mathbb{R}$  é um isomorfismo ( $\Rightarrow \dim H_c^n(M^n) = 1$ ).*

*Prova:* Temos que ver que se  $\int_M \omega = 0$ , então  $\omega = d\beta$  com  $\beta$  com suporte compacto.

(a) Vale para  $M = \mathbb{R}$ . Se  $g(t) = \int_{-\infty}^t \omega \Rightarrow \omega = dg$ .

(b) Se vale para  $\mathbb{S}^{n-1}$ , vale para  $\mathbb{R}^n$ . Se  $\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n) \subset \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ , como  $\mathbb{R}^n$  é contrátil  $\omega = d\eta$  para alguma  $\eta \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$  (mas  $\eta$  não tem nec. sup. compacto!). Agora, se  $\omega$  tem sup. compacto (SPG, na bola  $B_1^n$ ) e  $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$ , temos  $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} j^* \eta' = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} i^* \eta = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$  pelo teorema de Stokes, onde  $i : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $j : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  são as inclusões, e  $\eta' = \eta|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ . Logo, por hipótese,  $j^*[\eta'] = 0$ . Mas  $j^*$  é um isomorfismo pois  $\mathbb{S}^{n-1}$  é retrato por deformação de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Concluimos que  $\eta' = d\lambda$  para alguma  $\lambda \in \Omega^{n-2}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . Em particular, se  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz  $h \equiv 1$  fora de  $B_1^n$  e  $h \equiv 0$  em  $B_\epsilon^n$ ,  $\beta = \eta - d(h\lambda) \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$  tem suporte em  $B_1^n$ , e  $\omega = d\beta$ .

Uma outra prova, mais explícita, de (b): Se  $\omega = f dv_{\mathbb{R}^n} \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$  tem sup. compacto (SPG, em bola  $B_1^n$ ), então definimos  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  por  $g(p) = \int_0^1 t^{n-1} f(tp) dt$ ,  $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $r(x) = x/\|x\|$  (retração),  $i : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  a inclusão e  $\sigma = i_X^* dv_{\mathbb{R}^n} \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$  como em (2).

- Conta  $\Rightarrow w = d(g\sigma)$  (porém  $g\sigma$  não tem nec. sup. compacto!)
- $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} (g \circ i)^* \sigma = \int_{B_1^n} f dv_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0 \Rightarrow i^*(g\sigma) = d\lambda$ , por hipótese.
- $g\sigma = r^*(i^*(g\sigma)) = d(r^*\lambda)$  fora de  $B_1^n$ , pois  $(i \circ r)_{*p} = \|p\|^{-1} \Pi_{p^\perp}$ ,  $(i \circ r)^* \sigma(p) = \|p\|^{-n} \sigma(p)$ , e  $g(p) = \|p\|^{-n} (g \circ i \circ r)(p)$ , se  $\|p\| \geq 1$ .
- Se  $\beta := g\sigma - d(hr^*\lambda) \Rightarrow w = d(g\sigma) = d\beta$ , com  $\text{sup}(\beta) \subseteq B_1^n$ .

**(c) (!!!)** *Se vale para  $\mathbb{R}^n$  vale para toda  $M^n$ .* Fixemos qualquer  $w_0 \in \Omega_c^n(U_0)$  com  $U_0 \subset M^n$  difeo a  $\mathbb{R}^n$ , tal que  $\int_M w_0 \neq 0$ . Seja  $w \in \Omega_c^n(M^n)$ . Basta ver que existe  $a \in \mathbb{R}$  e  $\eta \in \Omega_c^{n-1}(M^n)$  tais que  $w = aw_0 + d\eta$ . Pegando partições da unidade podemos supor que  $\text{sup}(w) \subset U$ ,  $U$  difeo a  $\mathbb{R}^n$ . Como  $M^n$  é conexa, existe uma sequência  $\{U_i, 1 \leq i \leq m\}$ ,  $U_i$  difeo a  $\mathbb{R}^n$  com  $U_m = U$  e  $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ . Seja  $w_i$  com suporte compacto,  $\text{sup}(w_i) \subset U_i \cap U_{i+1}$ , e tal que  $\int_M w_i \neq 0$ . Como vale para  $\mathbb{R}^n \cong U_{i+1}$ ,  $w_{i+1} - c_{i+1}w_i = d\eta_{i+1}$ . Pronto! ■

**Teorema 23.**  $M^n$  conexa não orientável  $\Rightarrow H_c^n(M^n) = 0$ .

*Exercício.* Provar o Teorema 23 usando o recob. duplo orientável  $\pi : \tilde{M}^n \rightarrow M^n$ .

**Teorema 24.**  $M^n$  conexa não compacta com ou sem bordo  $\Rightarrow H^n(M^n) = 0$ .

*Provas:* Usar a idéia em **(c)**. Para o Teorema 24, supor  $M^n$  orientável e usar exaustão por compactos, e para  $M^n$  não orientável, provar que  $\pi^* : H^n(M^n) \rightarrow H^n(\tilde{M}^n)$  é injetiva (ver [Hi]). ■

Pelo Teorema 22, para qualquer função diferenciável própria entre variedades conexas orientadas,  $f : M^n \rightarrow N^n$  (mesma dimensão!), existe um número  $\text{deg}(f) \in \mathbb{R}$ , o *grau de  $f$* , tal que

$$\int_M f^* \omega = \text{deg}(f) \int_N \omega, \quad \forall \omega \in \Omega_c^n(N^n).$$

**Teorema 25.** *Nas hipóteses acima, se  $q \in N^n$  é um valor regular de  $f$  e  $f(p) = q$ , definimos  $\text{sgn}_f(p) = \pm 1$ , de acordo se  $f_{*p}$  preserva ou reverte a orientação. Então,*

$$\text{deg}(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{sgn}_f(p).$$

Em particular,  $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ , e  $\deg(f) = 0$  se  $f$  não for sobre.

*Prova:* Se  $\{p_1, \dots, p_k\} = f^{-1}(q)$ , escolhamos vizinhanças pequenas e disjuntas  $U_i$  de  $p_i$  e  $V$  de  $q$  tais que  $f : U_i \rightarrow V$  é difeo. Seja  $\omega$  com suporte compacto em  $V$  e tal que  $\int_N \omega \neq 0$ . Então,  $\int_{U_i} f^* \omega = \text{sgn}_f(p_i) \int_V \omega$ . Logo, o resultado é imediato... se valesse que  $\text{supp}(f^* \omega) \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$ . Mas se conserta assim: Seja  $K \subset V$  compacto tal que  $q \in K^\circ$ . Então,  $K' = f^{-1}(K) \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_k)$  é compacto, e logo  $f(K')$  é fechado e não contém  $q$ . Basta agora trocar  $V$  por qualquer  $V' \subset K^\circ \setminus f(K') \subset K$  que automaticamente satisfaz  $f^{-1}(V') \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$ . ■

**OBS:** {Valores regulares} é aberto e denso, e a soma é finita.

**OBS:**  $H_c^n(M^n) \not\subset H^n(M^n)$  em geral:  $H_c^n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ , porém  $H^n(\mathbb{R}^n) = 0$ ,  $n \geq 1$ . De fato,  $f \sim g \not\Rightarrow f^* = g^*$  em  $H_c^\bullet$ . Mas:

**Corolário 26.**  $f, g : M^n \rightarrow N^n$  como acima,  $f \sim g$  (propriamente homotópicas)  $\Rightarrow \deg(f) = \deg(g)$ .

*Exemplo:*  $\deg(-Id_{\mathbb{S}^n}) = (-1)^{n+1}$ .

**Corolário 27.** Teorema do cachorro peludo  $2n$ -dimensional.

**OBS:** Podemos sempre pentear cachorros de dimensão ímpar.

**Corolário 28.** Teorema Fundamental da Álgebra.

*Prova:* Estender  $g(z) = z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + a_k$  a  $\mathbb{C} \cup \infty = \mathbb{S}^2$  via  $g(\infty) = \infty$ . É suave pois  $1/g(1/z) = \frac{z^k}{1+a_1 z + \dots + a_k z^k}$ , e é homotópica a  $h(z) = z^k$  via  $g_t(z) = z^k + t(a_1 z^{k-1} + \dots + a_k)$ .

Seja  $w = f(r)dx \wedge dy = f(r)rdr \wedge d\theta$  com  $f$  com suporte compacto. Logo,  $\int_{\mathbb{R}^2} h^*w = k \int_{\mathbb{R}^2} w \Rightarrow \deg(g) = \deg(h) = k > 0 \Rightarrow g$  é sobrejetora.

Outra forma:  $h$  é difeo local que preserva orientação em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , e  $\forall u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $h^{-1}(u)$  possui  $k$  pontos  $\Rightarrow \deg(h) = k$ . ■

## §21. Motivação do conceito de sequência exata

Sejam  $U, V \subset M$  abertos tais que  $M = U \cup V$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow i_U : U \hookrightarrow M$ ,  $j_U : U \cap V \hookrightarrow U \Rightarrow i_U^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(U)$ ,  $j_U^* : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^k(U \cap V)$ . Idem para  $i_V, j_V$ . Temos então:

$$i = i_U^* \oplus i_V^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V),$$

$$j = j_V^* \circ \pi_2 - j_U^* \circ \pi_1 : \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U \cap V),$$

i.e.,  $i(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V)$ ,  $j(\sigma, \omega) = j_V^*\omega - j_U^*\sigma = \omega|_{U \cap V} - \sigma|_{U \cap V}$ .  
Juntando, temos

$$0 \rightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{i} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j} \Omega^k(U \cap V) \rightarrow 0, \quad (3)$$

com cada imagem contida no núcleo da seguinte. Agora, o ponto importante é que, de fato, são iguais! (o único não óbvio é que  $j$  é sobre, mas, se  $\{\rho_U, \rho_V\}$  é partição da unidade subordinada a  $\{U, V\}$  e  $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$ , então  $\omega_U := \rho_V\omega \in \Omega^k(U)$ ,  $\omega_V := \rho_U\omega \in \Omega^k(V)$ , e  $j(-\omega_U, \omega_V) = \omega$ ).

## §22. Complexos e sequências exatas (Spivak, v1, cap.11)

Sequências exatas (esp. vet. ou grupos abelianos): curta, longa.

*Exercício.* O dual de uma sequência exata é exata.

$$\begin{aligned}
A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0 &\Leftrightarrow f \text{ epimorfismo} \\
0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B &\Leftrightarrow f \text{ monomorfismo} \\
0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0 &\Leftrightarrow f \text{ isomorfismo} \\
A \xrightarrow{f} B \rightarrow C \rightarrow 0 &\Rightarrow C \cong B/\text{Im } f \\
0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 &\Rightarrow C \cong B/A
\end{aligned}$$

**Proposição 29.** (Teorema da dimensão na álgebra linear) Se  $0 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{V}_1 \xrightarrow{\beta} \mathbb{V}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{V}_k \rightarrow 0$  é exata  $\Rightarrow \sum_i (-1)^i \dim \mathbb{V}_i = 0$ .

*Prova:* Indução em  $k$ , trocando por  $0 \rightarrow \mathbb{V}_2/\text{Im } \alpha \xrightarrow{\beta^{[1]}} \mathbb{V}_3 \rightarrow \dots$  ■

*Complexo de cocadeias:*  $\mathcal{C} = \{C^k\}_{k \in \mathbb{Z}} + \text{'diferenciais'} \{d_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ :

$$\dots C^{-1} \xrightarrow{d_{-1}} C^0 \xrightarrow{d_0} C^1 \xrightarrow{d_1} C^2 \dots, \quad d_k \circ d_{k-1} = 0.$$

Soma direta de complexos de cocadeias

$a \in C^k$  é uma  $k$ -cocadeia de  $\mathcal{C}$

$a \in Z^k(\mathcal{C}) := \text{Ker } d_k \subset C^k$  é um  $k$ -cociclo de  $\mathcal{C}$

$a \in B^k(\mathcal{C}) := \text{Im } d_{k-1} \subset C^k$  é um  $k$ -cobordo de  $\mathcal{C}$

A  $k$ -ésima cohomologia de  $\mathcal{C}$  é dada por

$$H^k(\mathcal{C}) := Z^k(\mathcal{C})/B^k(\mathcal{C}).$$

Se  $a \in Z^k(\mathcal{C}) \Rightarrow [a] \in H^k(\mathcal{C})$  é a classe de cohomologia de  $a$

Um mapa de cocadeias  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  é uma sequência  $\{\varphi_k : A^k \rightarrow B^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  tal que  $d \circ \varphi_k = \varphi_{k+1} \circ d$ . Isto nos dá aplicações  $\varphi^* : H^\bullet(\mathcal{A}) \rightarrow H^\bullet(\mathcal{B})$ . A sequência  $0 \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{j} \mathcal{C} \rightarrow 0$  é dita *exata curta* se em cada nível  $k$  ela for exata. Neste caso,

$$H^k(\mathcal{A}) \xrightarrow{i^*} H^k(\mathcal{B}) \xrightarrow{j^*} H^k(\mathcal{C})$$

é exata para todo  $k$ . Mas não é exata com 0 à direita ou à esquerda... Porém:

**Teorema 30 (!!!!!!!).** Se  $0 \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{j} \mathcal{C} \rightarrow 0$  é exata curta, então existem homomorfismos (explícitos e naturais!)

$$\delta^* : H^k(\mathcal{C}) \rightarrow H^{k+1}(\mathcal{A}),$$

chamados homomorfismos de conexão, e que dão origem à seguinte sequência longa de cohomologia:

$$\begin{array}{ccccccc} & \rightarrow & H^{k+1}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{i^*} & \cdots & , & \\ & \searrow & \delta^* & \searrow & & & \\ & \rightarrow & H^k(\mathcal{A}) & \xrightarrow{i^*} & H^k(\mathcal{B}) & \xrightarrow{j^*} & H^k(\mathcal{C}) & \rightarrow \\ & \searrow & \delta^* & \searrow & & & & \\ & \rightarrow & \cdots & \xrightarrow{j^*} & H^{k-1}(\mathcal{C}) & \rightarrow & \end{array}$$

*Prova:* (“Perseguição”: fazer com alunos) Dada  $c \in Z^k(\mathcal{C})$ , existe  $b \in B^k$  tal que  $jb = c$ . Mas então  $db \in \text{Ker } j$  ( $jdb = djb = dc = 0$ ), e, como  $\text{Ker } j = \text{Im } i$ , existe  $a \in A^{k+1}$  tal que  $db = ia$  (dada  $b$ ,  $a$  é única pois  $i$  é injetiva). Agora,  $ida = dia = d^2b = 0 \Rightarrow da = 0$ . Definimos então  $\delta^*[c] := [a]$  (independe das escolhas de  $b$  e  $c$ ).

Vejam agora, e.g., que a sequência longa é exata em  $H^k(\mathcal{C})$ .

- $\text{Im } j^* \subset \text{Ker } \delta^*$ : Para  $[b] \in H^k(\mathcal{B})$ , temos  $\delta^*j^*[b] = \delta^*[jb]$ . Pela definição de  $\delta^*$ , podemos pegar como o  $b$  que leva a  $c = jb$  o próprio  $b$ . Mas  $b$  é um cociclo:  $db = 0$ . Portanto, na definição de  $\delta^*$ ,  $ia = db = 0$ , de onde  $a = 0$ . Logo,  $\delta^*[jb] = [0] = 0$ .
- $\text{Ker } \delta^* \subset \text{Im } j^*$ : Se  $\delta^*[c] = 0$ , o  $a$  na definição de  $\delta^*$  é um cobordo e o  $b$  um cociclo:  $a = da'$ , pelo que  $db = ida' = dia'$ , i.e.,  $d(b - ia') = 0$ . Mas então  $j^*[b - ia'] = [jb - jia'] = [jb] = [c]$ . ■

### §23. A sequência de Mayer-Vietoris

Como vimos, (3) é exata para todo  $k$ , logo temos como corolário:

**Teorema 31 (!!!!).** *A seguinte sequência longa de cohomologia, chamada de sequência de Mayer-Vietoris, é exata:*

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow H^0(M) \xrightarrow{i^*} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{j^*} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\delta^*} \dots \\
 \dots \\
 \dots \xrightarrow{\delta^*} H^k(M) \xrightarrow{i^*} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{j^*} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta^*} \\
 \xrightarrow{\delta^*} H^{k+1}(M) \xrightarrow{i^*} H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \xrightarrow{j^*} H^{k+1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta^*} \dots
 \end{aligned}$$

E, pelo mesmo preço, temos uma receita para construir  $\delta^*$ :

- Se  $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$ , com part. da unidade conseguimos formas  $\omega_U$  e  $\omega_V$  em  $U$  e  $V$  tais que  $j(-\omega_U, \omega_V) = \omega_V|_{U \cap V} + \omega_U|_{U \cap V} = \omega$ ;
- Agora, se  $\omega$  for fechada,  $-d\omega_U$  e  $d\omega_V$  coincidem em  $U \cap V$  (!!!), já que  $j(-d\omega_U, d\omega_V) = dj(-\omega_U, \omega_V) = d\omega = 0$ ;
- Logo,  $-d\omega_U$  e  $d\omega_V$  definem uma forma  $\sigma \in \Omega^{k+1}(M)$ , que é obviamente fechada (mas não necessariamente exata!). Então, temos que  $\delta^*[\omega] = [\sigma] \in H^{k+1}(M)$ .

**OBS:** Se  $U, V$  e  $U \cap V$  são conexos começamos em  $k = 1$ , i.e.,

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow H^0(M) \xrightarrow{i^*} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{j^*} H^0(U \cap V) \rightarrow 0, \\
 0 \rightarrow H^1(M) \xrightarrow{i^*} H^1(U) \oplus H^1(V) \xrightarrow{j^*} \dots
 \end{aligned}$$

são exatas (pois  $M$  é conexa, e  $H^0(U \cap V) \xrightarrow{\delta^*} H^1(M)$  é a função nula, já que  $j^* : H^0(U) \oplus H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V)$  é sobre).

*Exemplos:*  $M = \bigcup_i M_i$  disjunta  $\Rightarrow H^k(M) = \bigoplus_i H^k(M_i)$ ,  $H^\bullet(\mathbb{S}^n)$ ,  $H^\bullet(T^2)$ .

## §24. A característica de Euler

Nesta seção vamos supor que todas as cohomologias de  $M$  têm dimensão finita (veremos que isto acontece se  $M$  for compacta).

**Definição 32.** A *característica de Euler* de  $M$  é o invariante homotópico

$$\chi(M) := \sum_i (-1)^i b_i(M) \in \mathbb{Z},$$

onde  $b_k(M) := \dim H^k(M)$  é o  $k$ -ésimo número de Betti de  $M$ .

Mayer-Vietoris + Proposição 29  $\Rightarrow$

$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V). \quad (4)$$

Simplex  $\Rightarrow$  triangulações: sempre existe (pela base enumerável).

**Teorema 33.** Para qualquer triangulação de  $M^n$  vale que

$$\chi(M^n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i,$$

onde  $\alpha_k = \alpha_k(\mathcal{T})$  é o número de  $k$ -simplex em  $\mathcal{T}$ .

*Prova:* Para cada  $n$ -simplex  $\sigma_i$  de  $\mathcal{T}$ , sejam  $p_i \in \sigma_i^o$  e uma bolinha  $p_i \in B_{p_i} \subset \sigma_i^o$  (pensar  $p_i$  como bolinha também). Seja  $U_1$  a união disjunta destas  $\alpha_n$  bolinhas, e  $V_{n-1} = M \setminus \{p_1, \dots, p_{\alpha_n}\}$ . Logo, (4)  $\Rightarrow \chi(M^n) = \chi(V_{n-1}) + (-1)^n \alpha_n$ .

Agora, para cada  $(n-1)$ -face  $\tau_j$  de  $\mathcal{T}$ , pegue uma bolinha “longa”  $B_{\tau_j}$  unindo as duas  $B_{p_i}$ ’s de cada  $n$ -simplex adjacente a  $\tau_j$ . Chame de  $U_2$  à união destas  $\alpha_{n-1}$  bolinhas (disjuntas). Pegue também um arco (dentro de  $B_{\tau_j}$ ) unindo os bordos das duas  $B_{p_i}$ ’s, e



seja  $V_{n-2}$  o complemento destes  $\alpha_{n-1}$  arcos. De novo, (4)  $\Rightarrow$   $\chi(V_{n-1}) = \chi(V_{n-2}) + (-1)^{n-1}\alpha_{n-1}$ .

Indutivamente, temos  $V_{n-3}, \dots, V_0$ , este último sendo uma união de  $\alpha_0$  conjuntos contráteis (cada um vizinhança de um vértice de  $\mathcal{T}$ ), de onde  $\chi(V_0) = \alpha_0$  e  $\chi(V_k) = \chi(V_{k-1}) + (-1)^k\alpha_k$ . ■

**Corolário 34.** (*Descartes-Euler*) *Se um poliedro convexo tem  $V$  vértices,  $F$  faces, e  $E$  arestas, então  $V - E + F = 2$ .*

**Corolário 35.** *Só existem 5 sólidos Pitagóricos.*

*Prova:* Se  $r \geq 3$  é o número de arestas (= vértices) em cada face, e  $s \geq 3$  é o número de arestas (= faces) que chegam a cada vértice, temos que  $rF = 2E = sV$ . Mas  $V - E + F = 2 \Rightarrow 1/s + 1/r = 1/E + 1/2 > 1/2$ , ou  $(r - 2)(s - 2) < 4$ . Como  $F = 4s/(2s + 2r - sr)$  temos  $(r, s) = (3,3) =$  tetraedro = Fogo,  $(4,3) =$  cubo = Terra,  $(3,4) =$  octaedro = Ar,  $(3,5) =$  icosaedro = Agua, e  $(5,3) =$  dodecaedro... que, segundo Platão, foi “...usado por Deus para distribuir as (12!) constelações no Universo” (não consegui completar a prova desta afirmação). ■



Modelo Platónico do sistema solar por Kepler; Circogonia icosaedra; Pedras de 2000 AC

**FORTE CONSELHO:** Assistir este vídeo sobre a vida de Kepler, da espetacular série **Cosmos** (a dos anos '80!).

**OBS:** Em dimensão  $n = 4$  tem 6 sólidos regulares (tem um com 24 faces), e para  $n \geq 5$  tem só 3: o simplex (tetraedro), o hipercubo (claro), e o hiperoctaedro, que é a cápsula convexa de  $\{\pm e_i\}$ .

## §25. Mayer-Vietoris para suporte compacto

Não podemos simplesmente trocar  $H^k$  por  $H_c^k$  em Mayer-Vietoris, pois  $\omega \in \Omega_c^k(M) \not\rightarrow i_U^*(\omega) \in \Omega_c^k(U)$ . Porém, se  $\omega \in \Omega_c^k(U)$ , a extensão como 0 de  $\omega$ ,  $\hat{i}_U(\omega)$ , satisfaz  $\hat{i}_U(\omega) \in \Omega_c^k(M)$ . E isto funciona! ( $j := \hat{j}_U \oplus \hat{j}_V$ ,  $i := \hat{i}_U - \hat{i}_V$ ):

**Lema 36.** *A seguinte seqüência é exata  $\forall k$  (exercício fácil):*

$$0 \rightarrow \Omega_c^k(U \cap V) \xrightarrow{j} \Omega_c^k(U) \oplus \Omega_c^k(V) \xrightarrow{i} \Omega_c^k(U \cup V) \rightarrow 0.$$

Logo, Teorema 30 + Lema 36  $\Rightarrow$

**Teorema 37.** *A seguinte seqüência longa é exata:*

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\delta^*} H_c^k(U \cap V) \xrightarrow{j^*} H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \xrightarrow{i^*} H_c^k(M) \xrightarrow{\delta^*} \\ \xrightarrow{\delta^*} H_c^{k+1}(U \cap V) \xrightarrow{j^*} H_c^{k+1}(U) \oplus H_c^{k+1}(V) \xrightarrow{i^*} H_c^{k+1}(M) \xrightarrow{\delta^*} \dots \end{aligned}$$

**OBS:** Comparar as duas Mayer-Vietoris.

**OBS:** CUIDADO PARA NÃO MISTURAR/CONFUNDIR!!!

**OBS:** O Teorema 30 é uma fábrica de teoremas!

## §26. Mayer-Vietoris para pares

Seja  $i : N \hookrightarrow M$  uma subvariedade compacta e mergulhada, e  $k \in \mathbb{Z}$ . Então,  $W = M \setminus N$  é uma variedade e portanto temos

$$\Omega_c^k(M \setminus N) \xrightarrow{\hat{j}_W} \Omega_c^k(M) \xrightarrow{i^*} \Omega_c^k(N).$$

Mas esta não é exata em  $\Omega_c^k(M)$ : o núcleo de  $i^*$  são as formas que se anulam em  $N$ , enquanto que a imagem de  $\hat{j}_W$  são as que se anulam em vizinhança de  $N$ . Mas isto se conserta assim:

Seja  $V$  uma viz. tubular com fecho compacto de  $N$ ,  $j : N \hookrightarrow V$  a inclusão, e  $\pi : V \rightarrow N$  um retrato por deformação, i.e.,  $\pi \circ j = id_N$ ,  $j \circ \pi \sim id_V$ . Construimos agora uma seqüência de tais  $V$ ,  $V = V_1 \supset V_2 \supset \dots$  com  $\cap_i V_i = N$ . Então, diremos que  $\omega$  e  $\omega'$  em  $\Omega^k(U)$  para algum aberto  $U \subset M$  contendo  $N$  são *equivalentes* se existe  $r > i, j$  tal que  $\omega|_{V_r} = \omega'|_{V_r}$ . O conjunto destas classes forma um espaço vetorial  $\mathcal{G}^k(N)$ , o dos “*germes de k-formas definidas numa vizinhança de N*”, que tem seu diferencial obvio induzido por  $d$ , e é portanto um complexo de cocadeias  $\mathcal{G} = (\mathcal{G}^\bullet(N), d)$ . Isto dá um mapa de cocadeias  $\Omega_c^k(M) \xrightarrow{\hat{i}^*} \mathcal{G}^k(N)$ , onde  $\hat{i}^*(\omega) =$  classe de  $\omega|_{V_1}$ .

**Lema 38.** *A seguinte seqüência é exata (outro exercício):*

$$0 \rightarrow \Omega_c^k(M \setminus N) \xrightarrow{\hat{j}_W} \Omega_c^k(M) \xrightarrow{\hat{i}^*} \mathcal{G}^k(N) \rightarrow 0.$$

Agora, como  $j^* : H^k(V_i) \rightarrow H^k(N)$  é isomorfismo para todo  $i$  e para todo  $k$ ,  $H^k(N)$  é isomorfo a  $H^k(\mathcal{G})$  (exercício). Logo, Teorema 30 + Lema 38  $\Rightarrow$

**Teorema 39.** *Existe uma seqüência longa exata:*

$$\dots \rightarrow H_c^k(M \setminus N) \rightarrow H_c^k(M) \rightarrow H^k(N) \xrightarrow{\delta^*} H_c^{k+1}(M \setminus N) \rightarrow \dots$$

De maneira totalmente análoga ao Teorema 39, temos:

**Teorema 40.** *Seja  $M$  uma variedade com bordo compacto. Então existe uma seqüência longa exata:*

$$\dots \rightarrow H_c^k(M \setminus \partial M) \rightarrow H_c^k(M) \rightarrow H^k(\partial M) \xrightarrow{\delta^*} H_c^{k+1}(M \setminus \partial M) \rightarrow \dots$$

**OBS:** Se  $M$  é variedade com bordo e  $M^o = M \setminus \partial M$  o seu interior, retirando viz. tubulares  $V_i$  do bordo como na definição de  $\mathcal{G}$  temos  $M_i = M \setminus V_i$ , e inclusões  $M_i^o \hookrightarrow M_i \hookrightarrow M^o \hookrightarrow M$ . Mas  $M_i \sim M$  e  $M_i^o \sim M^o$ , o que induz dois isomorfismos em cohomologia, e o que nos permite concluir que  $H^\bullet(M) \cong H^\bullet(M \setminus \partial M)$ .

*Aplicação:* Se  $B \subset \mathbb{R}^n$  é bola aberta,  $H_c^k(\mathbb{R}^n) = H_c^k(B) \cong H_c^k(\bar{B}) = H^k(\bar{B}) = H^k(B) = 0, \forall k \neq n$ . Em particular,  $H_c^k(\mathbb{R}^n) \cong H^{n-k}(\mathbb{R}^n) \cong (H^{n-k}(\mathbb{R}^n))^* \forall k$ .

*Exercício:* Calcular  $H^\bullet(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)$ . Sug:  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m = \partial(\bar{B} \times \mathbb{S}^m)$ .

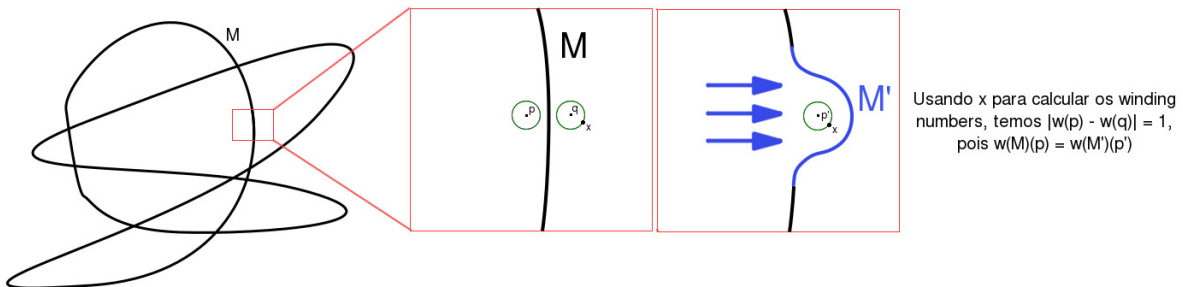
## §27. Aplicação: o Teorema de Jordan generalizado

**Teorema 41 (Jordan generalizado).** *Seja  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície compacta, conexa e mergulhada. Então,  $M^n$  é orientável,  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M^n$  tem exatamente 2 comp. conexas, uma limitada e a outra não, e  $M^n$  é o bordo de cada uma.*

*Prova:* Pela aplicação acima e o Teorema 39, temos

$$0 \cong H_c^n(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow H^n(M^n) \rightarrow H_c^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus M) \rightarrow H_c^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}) \cong \mathbb{R} \rightarrow 0.$$

Isto é,  $\dim H^n(M^n) + 1 = \# \text{ comp. conexas de } \mathbb{R}^{n+1} \setminus M^n \geq 2$  (exercícios 23 a 26 Spivak cap.8 sobre *winding numbers* mod 2:  $f : M^n \times I \rightarrow N^n$  homotopia,  $y \in N^n$  valor regular de  $f, f_0, f_1 \Rightarrow \#f_0^{-1}(y) = \#f_1^{-1}(y) \text{ mod } 2$ ; fazer desenho).



Portanto, pelo Teorema 22 e Teorema 23,  $H^n(M^n) \cong \mathbb{R}$ ,  $M^n$  é orientável, e  $\#$  comp.conexas de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M^n = 2$ . Ainda pelo mesmo argumento com *winding numbers*, todo ponto de  $M^n$  está arbitrariamente perto de pontos nas duas componentes conexas. ■

**Corolário 42.** *Nem a garrafa de Klein, nem o plano projetivo possuem mergulhos em  $\mathbb{R}^3$ .*

## §28. Dualidade de Poincaré

Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto, limitado e estrelado em relação a 0, i.e.,

$$U = U_\rho = \{tx : 0 \leq t < \rho(x), x \in \mathbb{S}^{n-1}\}$$

para alguma função limitada  $\rho : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ .

**Lema 43.** *Se  $\rho \in C^\infty$ ,  $U$  é difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .*

*Prova:* SPG,  $\rho \geq 1$ , e basta pegar o difeomorfismo  $h: B_1 \rightarrow U$  como  $h(tx) = (t + (\rho(x) - 1)f(t))x$ , para qualquer função diferenciável  $f$  com  $f = 0$  em  $[0, \epsilon)$ ,  $f' \geq 0$ ,  $f(1) = 1$ . ■

Agora,  $\rho$  pode nem mesmo ser contínua... Mas é semi-contínua:

**Lema 44.** *Dado  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  e  $\epsilon > 0$ , existe viz.  $V_x = V(x, \epsilon)$  de  $x$  tal que  $\rho|_{V_x} > \rho(x) - \epsilon$ . (Prova:  $U$  é aberto).*

**Lema 45.**  $H^\bullet(U) \cong H^\bullet(\mathbb{R}^n)$  e  $H_c^\bullet(U) \cong H_c^\bullet(\mathbb{R}^n)$ . (De fato,  $U$  é difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  mesmo que  $\rho$  não seja  $C^\infty$ , mas é difícil).

*Prova:* O primeiro é obvio pois  $U$  é contrátil. Basta ver então  $H_c^k(U) = 0$  para  $k < n$  pela aplicação anterior (pag. 26). Mas se  $[\omega] \in H_c^k(U)$ , suponhamos que existe  $\bar{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R})$  tal que

$K = \text{sup}(\omega) \subset U_{\bar{\rho}} \subset U$  (isto é,  $\bar{\rho} < \rho$ ). Então  $U_{\bar{\rho}} \cong \mathbb{R}^n$  e  $[\omega] \in H_c^k(U_{\bar{\rho}}) = 0$ . Logo, existe  $\eta \in \Omega_c^{k-1}(U_{\bar{\rho}}) \subset \Omega_c^{k-1}(U)$  tal que  $\omega = d\eta$ .

Para provar que existe tal  $\bar{\rho}$ , seja  $2\epsilon = d(K, \mathbb{R}^n \setminus U) > 0$  e, para  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $t(x) := \max\{t : tx \in K\} \leq \rho(x) - 2\epsilon$ . Em viz.  $V_x$  de  $x$  temos que  $t|_{V_x} < \rho(x) - \epsilon < \rho|_{V_x}$  pelo Lema 44 e a definição de  $\epsilon$ . Pegamos um subcobrimento finito  $\{V_{x_i}\}$  de  $\mathbb{S}^{n-1}$  e uma partição da unidade  $\{\varphi_i\}$  subordinada a ele, e definimos  $\bar{\rho} = \sum_i (\rho(x_i) - \epsilon)\varphi_i$ . Logo,  $t < \bar{\rho} < \rho - \epsilon < \rho$ . ■

**Definição 46.** Dizemos que  $M^n$  tem *tipo finito* se existe um cobrimento finito  $\mathcal{U}$  de  $M^n$  tal que toda interseção  $V$  não vazia de elementos de  $\mathcal{U}$  satisfaz que  $H^\bullet(V) = H^\bullet(\mathbb{R}^n)$  e  $H_c^\bullet(V) = H_c^\bullet(\mathbb{R}^n)$ . Um tal cobrimento  $\mathcal{U}$  se diz *bacana*.

**Lema 47.** *Toda variedade compacta tem cobrimento bacana.*

*Prova:* Viz. totalmente normais (Geometria Riemanniana). ■

**Proposição 48.** *Se  $M$  tem tipo finito (e.g.  $M$  compacta), então  $H^\bullet(M)$  e  $H_c^\bullet(M)$  têm dimensão finita.*

*Prova:* Indução em  $\#\mathcal{U}$  usando Mayer-Vietoris. ■

Agora, observando que  $H^k(M) \wedge H_c^r(M) \subset H_c^{k+r}(M)$ , temos:

**Teorema 49 (Dualidade de Poincaré).** *Se  $M^n$  é conexa e orientável, a função linear  $PD: H^k(M) \rightarrow (H_c^{n-k}(M))^*$ ,*

$$PD([\omega])([\sigma]) := \int_M \omega \wedge \sigma$$

*é um isomorfismo, para todo  $k$ .*

*Prova:* A prova para variedades de tipo finito segue por indução no número de elementos de um cobrimento bacana usando o seguinte Lema. ■

**Lema 50.** *Se  $U$  e  $V$  são abertos tais que  $PD$  é isomorfismo para todo  $k$  em  $U$ ,  $V$  e  $U \cap V$ , então  $PD$  é isomorfismo para todo  $k$  em  $U \cup V$ .*

*Prova:* Seja  $M = U \cup V$  e  $l = n - k$ . Mayer-Vietoris nos diz

$$\begin{array}{ccccccccc} H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) & \rightarrow & H^{k-1}(U \cap V) & \rightarrow & H^k(M) & \rightarrow & H^k(U) \oplus H^k(V) & \rightarrow & H^k(U \cap V) \\ \downarrow PD \oplus PD & & \downarrow PD & & \downarrow PD & & \downarrow PD \oplus PD & & \downarrow PD \\ (H_c^{l+1}(U) \oplus H_c^{l+1}(V))^* & \rightarrow & H_c^{l+1}(U \cap V)^* & \rightarrow & H_c^l(M)^* & \rightarrow & (H_c^l(U) \oplus H_c^l(V))^* & \rightarrow & H_c^l(U \cap V)^* \end{array}$$

onde todos os mapas verticais são isomorfismos (menos talvez o do meio). Mais ainda, todos os quadrados comutam a menos de sinal (exercício), e portanto trocando os sinais de alguns  $PD$  tudo comuta. O Lema segue então do *Lema dos cinco* (provar), que diz precisamente que o do meio também tem que ser isomorfismo. ■

**Corolário 51.** *Se  $M^n$  é compacta, conexa e orientável  $\Rightarrow b_k(M^n) = b_{n-k}(M^n)$ . Em particular  $\chi(M^n) = 0$  se  $n$  for ímpar.*

## §29. Homologia singular e o Teorema de deRham

Como vimos na Seção 17, temos um operador de bordo entre cadeias (de simplex) com qualquer grupo abeliano  $G$  como coeficientes,  $\partial_k : C_k(M) \rightarrow C_{k-1}(M)$ , que satisfaz  $\partial^2 = 0$ . Isto é, as cadeias formam um complexo (para qualquer espaço topológico). A homologia desse complexo é chamada de *homologia singular* de  $M$ :

$$H_k(M) = H_k(M; G) := \text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}.$$

Agora, se  $M = U \cup V$ , compondo cadeias com as inclusões, temos a seguinte sequência obviamente exata de Mayer-Vietoris:

$$0 \rightarrow C_k(U \cap V) \rightarrow C_k(U) \oplus C_k(V) \rightarrow C_k(U + V) \rightarrow 0,$$

onde  $C_k(U + V)$  são as  $k$ -cadeias de  $M$  que se decompõem como soma de  $k$ -cadeias em  $U$  e  $V$ . Pelo Teorema 30 temos então a sequência longa correspondente em homologia. Mas, com uma idéia conceitualmente similar à que levou a construção de  $\mathcal{G}$  (“decomposição baricêntrica”) se prova com algum trabalho que

$$H_\bullet(U \cup V) \cong H_\bullet(U + V).$$

Logo, temos a sequência longa exata de homologia singular:

$$\cdots H_{k+1}(M) \rightarrow H_k(U \cap V) \rightarrow H_k(U) \oplus H_k(V) \rightarrow H_k(M) \rightarrow H_{k-1}(U \cap V) \rightarrow \cdots \quad (5)$$

Comparar com o Teorema 37 e usar o Teorema 7!

Para a homologia singular (diferenciável) com coeficientes em  $\mathbb{R}$ ,  $H_\bullet(M; \mathbb{R})$ , pelo teorema de Stokes e de maneira análoga à Dualidade de Poincaré (Lema 50 na prova do Teorema 49), se prova o seguinte (ver Seção 27 e Seção 17):

**Teorema 52 (deRham).** *Para toda variedade  $M$ , a função linear  $DR: H^k(M) \rightarrow (H_k(M; \mathbb{R}))^*$ ,*

$$DR([\omega])([c]) = \int_c \omega$$

*é um isomorfismo, para todo  $k$ .*

*Prova:* Ver [aqui](#) um argumento geral, mesmo que a variedade não seja de tipo finito. ■

*Fim. :o)*



## References

- [Ha] Hatcher, A.: *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Hi] Hitchin, N.: *Differentiable manifolds*. Lecture notes here.
- [Hr] Hirsch, M.: *Differential topology*. Graduate text in Mathematics 33, Springer-Verlag, New York, 1972.
- [Le] Lee, J.: *Introduction to smooth manifolds*. University of Washington, Washington, 2000.
- [Tu] Tu, L: *An introduction to manifolds*. Second edition. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [Sp] Spivak, M.: *A comprehensive introduction to differential geometry..* Vol. III. Third edition. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979.