

Análise em variedades

Luis Florit (luis@impa.br, sala 404)

Versão: 20181112.1433

Baixar a última versão daqui: <http://luis.impa.br/aulas/anvar/aulas.pdf>

Bibliografia: [Tu], [Sp], [Le], [Ha], [Hi], [Hr]...

§1. Variedades

Queremos fazer cálculo: objeto precisa ser *localmente* um espaço vetorial. *Exemplo:* \mathbb{S}^n .

Espaço topológico, vizinhança, cobrimento.

Base enumerável.

Hausdorff (T_2).

OBS: Base enumerável e Hausdorff são herdados por subespaços.

Espaço topológico localmente Euclideano: cartas, coordenadas.

Dimensão, notação: $\dim M^n = n$.

Variedade topológica = Espaço topológico + localmente Euclideano + Base enumerável + Hausdorff.

Exemplos: \mathbb{R}^n , gráficos, cúspide. Não é variedade: ' \times '.

Cartas (C^∞ -)compatíveis, funções de transição, atlas (C^∞).

Exemplo: \mathbb{S}^n .

Estrutura diferenciável = Atlas maximal.

Variedade = Variedade diferenciável = Variedade topológica + Atlas maximal.

Exemplos: \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n , $U \subset M^n$, $GL(n, \mathbb{R})$, gráficos, var. produto.

§2. Funções diferenciáveis entre variedades

Definição, composição, difeomorfismo, difeomorfismo local.

Exemplos: Função a/desde produto; toda carta é difeo c/imagem.

Derivadas parciais, matriz Jacobiana, Jacobiano.

Grupos de Lie, exemplos: $Gl(n, \mathbb{R})$, \mathbb{S}^1 , \mathbb{S}^3 .

Translações a esquerda e direita em $G : L_g, R_g$.

§3. Quocientes

Exercício: Mostre que em qualquer quociente de espaço topológico existe uma única estrutura topológica mínima, chamada *topologia quociente*, tal que a projeção é continua (i.e., a *topologia final de π*). Mas o quociente de uma variedade não necessariamente é uma variedade...

Exemplos: Faixa Möbius, $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $[0, 1]/\{0, 1\} = \mathbb{S}^1$.

Relações de equiv. abertas: X tem base enum. $\Rightarrow X/\sim$ tem, e $\{(x, y) \in X \times X : x \sim y\}$ é fechado $\Rightarrow X/\sim$ é Hausdorff.

Exemplo: $\mathbb{R}P^n$.

Uma ação propriamente descontínua $\varphi : G \times M \rightarrow M$ satisfaz:

- 1) $\forall p \in M, \exists U_p \subset M$ tal que $(g \cdot U_p) \cap U_p = \emptyset, \forall g \in G \setminus \{e\}$,
- 2) $\forall p, q \in M$ em órbitas diferentes, $\exists U_p, U_q \subset M$ tais que $(G \cdot U_p) \cap U_q = \emptyset$ (precisa desta condição para garantir Hausdorff).

§4. Espaço tangente

Germes de funções: $\mathcal{F}_p(M) = \{f : U \subset M \rightarrow \mathbb{R} : p \in U\} / \sim$

$T_p M, x : U_p \subset M^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ carta $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \in T_p M, 1 \leq i \leq n$.

Diferencial de funções \Rightarrow regra da cadeia.

f difeomorfismo local $\Rightarrow f_{*p}$ isomorfismo \Rightarrow a dimensão é preservada por difeomorfismos locais.

Recíproca: Teorema da função inversa (*tem* que valer!).

Como toda carta x é difeomorfismo com imagem e como

$$x_{*p}(\partial/\partial x_i|_p) = \partial/\partial u_i|_{x(p)} \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

então $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\}$ é base de $T_pM \Rightarrow \dim T_pM = \dim M$.
Expressão local da diferencial.

Curvas: velocidade, expressão local.

Diferencial usando curvas: todo vetor é derivada de curva.

OBS: $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$: se $f \in \mathcal{F}_p(U)$, $v \in T_pM$, então $f_{*p}(v) = v(f)$.

Derivadas de curvas, e cálculo da diferencial usando curvas.

Imersão, submersão, mergulho. Posto.

Exemplos: projeções e injeções em produtos de variedades.

Identificação do espaço tangente do produto de variedades:

$$T_pM \times T_{p'}M' \cong T_{(p,p')}(M \times M').$$

Definição 1. Um ponto $p \in M$ se diz um *ponto crítico* de $f : M \rightarrow N$ se f_{*p} não for sobrejetiva. Caso contrario, p se diz *ponto regular*. Um ponto $q \in N$ é um *valor crítico* de f se for imagem de *algum* ponto crítico. Caso contrário, é um *valor regular* de f (em particular, $q \in N, q \notin \text{Im}(f) \Rightarrow q$ é valor regular de f).

§5. Subvariedades

Subvariedades regulares $S \subset M$, cartas adaptadas φ_S .

Codimensão. Topologia.

Exemplos: $\sin(1/t) \cup I$; pontos e abertos.

As φ_S dão atlas de S .

Funções diferenciáveis desde e para subvariedades regulares.

Conjuntos de nível: $f^{-1}(q)$. Conjuntos de nível regulares.

Exemplos: \mathbb{S}^n , $SL(n, \mathbb{R})$: usar curva $t \mapsto \det(tA)$!!

Exercício: $S \subset M$ é subv. $\iff \exists$ cobrimento C de S / $S \cap U$ é subv. de $U, \forall U \in C$.

Teorema 2. *Se $q \in \text{Im}(f) \subset N^n$ é um valor regular de $f : M^m \rightarrow N^n$, então $f^{-1}(q) \subset M^m$ é uma subvariedade regular de M^m de dimensão $m - n$.*

Prova: Seja $p \in M^m$ com $f(p) = q$ e cartas locais (x, U) e (y, V) em p e q . Podemos supor que $y(q) = 0$, $f(U) \subset V$ e que $\text{span}\{f_{*p}(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p) : i = 1, \dots, n\} = T_q N$. Defina $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $\varphi = (y \circ f, x_{n+1}, \dots, x_m)$. Então, como φ_{*p} é um isomorfismo, existe $U' \subset U$ tal que $x' = \varphi|_{U'} : U' \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma carta de M^m em p . Além disso, como $y \circ f \circ x'^{-1} = \pi_n$, temos que $f^{-1}(q) \cap U' = \{r \in U' : x'_1(r) = \dots = x'_n(r) = 0\}$. Logo, x' é uma carta adaptada a $f^{-1}(q)$. ■

Exercício: Adaptando a prova do Teorema 2, prove o seguinte: Seja $f : M^m \rightarrow N^n$ uma função que tem posto constante k numa vizinhança de $p \in M$. Então existem cartas em p e em $f(p)$ tais que a expressão de f nessas coordenadas é dada por

$$\pi_k := (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Obtenha disto a forma normal das imersões e submersões.

Exercício: Conclua do exercício anterior que, se f tem posto $\text{cte} = k$ numa vizinhança U de $f^{-1}(q) \neq \emptyset$, então $U \cap f^{-1}(q)$ é uma subv. regular de M^m de $\dim m - k$.

Exemplo: $f : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), f(A) = AA^t$ tem posto constante $n(n+1)/2$ (pois $f \circ L_C = L_C \circ R_{C^t} \circ f \ \forall C$) $\implies O(n)$ subvariedade dimensão $n(n-1)/2$ (não precisava posto constante, basta ver que $\text{Im}(f) \subset \text{Sim}(n, \mathbb{R})$ e I é valor regular).

OBS: Como “*ter posto máximo*” é uma condição aberta, se uma função f é uma imersão (ou uma submersão) num ponto p , então é uma imersão (ou uma submersão) numa vizinhança de p .

$SL(n, \mathbb{R}), SO(n), O(n), \mathbb{S}^3, U(n), \dots$ são todos grupos de Lie. Subvariedades imersas e mergulhadas. Figura 8.

Identificar: $p \in S \subset M \Rightarrow T_p S \subset T_p M; S \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow T_p S \subset \mathbb{R}^n$.

Exercício: Ler (e entender!) a prova do Teorema de Sard (pode ver [aqui](#)).

§6. Fibrado tangente e fibrados vetoriais (ver [Zi])

Estrutura topológica e diferenciável de TM .

$\pi : TM \rightarrow M$. Campos de vetores sobre M :

$$\mathcal{X}(M) = \{X : M \rightarrow TM : \pi \circ X = \text{Id}_M\}.$$

Diferenciabilidade, estrutura de módulo de $\mathcal{X}(M)$.

Campos de vetores em $M \cong$ Derivações em M :

$$\mathcal{D}(M) = \{X \in \text{End}(\mathcal{F}(M)) : X(fg) = X(f)g + fX(g)\}.$$

Colchete: $\mathcal{X}(M)$ é álgebra de Lie: $[\cdot, \cdot]$ é bilinear, antisimétrico e satisfaz identidade de Jacobi.

Dada $f : M \rightarrow N \Rightarrow$ campos f -relacionados: \mathcal{X}_f . *Ex.:* $X|_U$.

$$X_i \sim_f Y_i \Rightarrow [X_1, X_2] \sim_f [Y_1, Y_2] \Rightarrow [X|_U, X'|_U] = [X, X']|_U.$$

Campos ao longo de f : expressão local.

Curvas integrais, fluxo local e Teorema Fundamental EDO.

Fibrados vetoriais, trivializações locais, fns. de transição. TM .

Fibrado trivial, fibrado produto.

Soma de Whitney de fibrados vetoriais.

Pull-back de fibrados vetoriais: $f^*(E)$.

Aplicações de fibrados, isomorfismo. *Exemplo:* $f_* : TM \rightarrow TN$.
Seções. Referenciais. Diferenciabilidade.

Exercício: Um fibrado vet. é trivial se e somente se existe um referencial *global*.

Fibrado cotangente: T^*M , $\{dx_i, i = 1, \dots, n\}$.

Fibrados gerais e G -fibrados. Redução.

§7. Partições da unidade

Suporte de funções. Bump functions.

Extensões globais de campos e funções C^∞ locais.

Partições da unidade subordinadas a cobrimentos.

Existência de partições da unidade para variedades compactas.

Aplicação: Existência de métricas Riemannianas.

Aplicação: Teorema(s) de mergulho de Whitney (prova aqui).

Exercício: Ler (e entender!) a prova da existência de partições da unidade em geral (melhor que no Tu, ver aqui).

§8. Orientação

Orientabilidade... fibrado! *Exemplo:* TM é orientável.

Faixa de Moebius: truque papel, nó: top. intrínseca vs extrínseca.

§9. 1-formas diferenciais

$\Omega^1(M) = \Gamma(T^*M) = \{w : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M) / w \text{ é } \mathcal{F}(M)\text{-linear}\}$:
operador local \Rightarrow operador pontual $\Rightarrow \mathcal{F}(M)$ -linear.

$f \in \mathcal{F}(M) \Rightarrow df \in \Omega^1(M)$, e $df \cong f_*$.

(x, U) carta $\Rightarrow \{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\}$ é base T_pM cuja base dual é
 $\{dx_1|_p, \dots, dx_n|_p\}$ (i.e., base de T_p^*M).

$\{dx_1, \dots, dx_n\}$ são então um referencial de T^*U : expressão local.

Exemplo: Forma de Liouville em T^*M : $\lambda(w) := w \circ \pi_* w$.

Pull back: $\varphi \in \text{End}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \Rightarrow \varphi^* \in \text{End}(\mathbb{W}^*, \mathbb{V}^*)$;

$f : M \rightarrow N \Rightarrow f^* : \mathcal{F}(N) \rightarrow \mathcal{F}(M)$; $f^* : \Omega^1(N) \rightarrow \Omega^1(M)$.

Importância do pull-back!

Restrição de 1-formas a subvariedade $i : S \rightarrow M$: $w|_S = i^* w$.

§10. Álgebra multilinear

Sejam \mathbb{V} e \mathbb{V}' \mathbb{R} -espaços vetoriais. $\mathbb{V}^* = \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{R})$.

Funções bi/multi lineares em espaços vetoriais: $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$.

Tensores e k -formas em \mathbb{V} : $\text{Bil}(\mathbb{V}) = (\mathbb{V} \otimes \mathbb{V})^* = \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^*$.

$\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}'$, $\mathbb{V} \wedge \mathbb{V}$, $\wedge^0 \mathbb{V} = \mathbb{V}^{\otimes 0} := \mathbb{R}$,

$$\mathbb{V}^{\otimes k} := \mathbb{V} \otimes \cdots \otimes \mathbb{V}, \quad \dim \mathbb{V}^{\otimes k} = (\dim \mathbb{V})^k$$

$$\wedge^k \mathbb{V} := \mathbb{V} \wedge \cdots \wedge \mathbb{V} \subset \mathbb{V}^{\otimes k}, \quad \dim \wedge^k \mathbb{V} = \binom{\dim \mathbb{V}}{k}$$

Operadores \otimes e \wedge (bil. e assoc.) sobre aplicações multilineares:

$$\sigma \in \wedge^k \mathbb{V}, \quad \omega \in \wedge^s \mathbb{V} \Rightarrow \omega \wedge \sigma := \frac{1}{k!s!} A(\omega \otimes \sigma) \in \wedge^{(k+s)} \mathbb{V}$$

OBS: $\omega \wedge \sigma = (-1)^{ks} \sigma \wedge \omega$.

§11. k – formas diferenciais e campos tensoriais

A álgebra multilinear estende-se a fibrados vetoriais: $\text{Hom}(E, E')$

Exemplos: T^*M ; métrica Riemanniana: $\langle , \rangle|_U = \sum g_{ij} dx_i \otimes dx_j$

Campos tensoriais (tensores) e k -formas (diferenciais):

$$\mathcal{X}^k(M^n), \quad \Omega^k(M^n)$$

são simplesmente as seções dos fibrados $(T^*M)^{\otimes k}$, $\Lambda^k(T^*M)$.

Tensores = aplicações $\mathcal{F}(M)$ -multilineares (bump-functions).

OBS: $\Omega^0(M) = \mathcal{X}^0(M) = \mathcal{F}(M)$, $\Omega^1(M) = \mathcal{X}^1(M)$.

Notação: $\mathcal{J}_{k,n} := \{(i_1, \dots, i_k) : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$, e para $I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{J}_{k,n}$, $dx_I := dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$.

Expressões locais:

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_n = \det([\partial f_i / \partial x_j]_{1 \leq i, j \leq n}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (1)$$

e, para $J = (j_1, \dots, j_k) \in \mathcal{J}_{k,n}$ e $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{F}(M)$,

$$dy_J = \sum_{I \in \mathcal{J}_{k,n}} \det(A_{JI}) dx_I, \quad \text{onde } A_{JI} = \left[\frac{\partial y_{j_r}}{\partial x_{i_s}} \right]_{1 \leq r, s \leq k}.$$

Operador $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^s(M) \rightarrow \Omega^{k+s}(M)$ bilinear, tensorial

$$\Omega^\bullet(M) := \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$$

é uma *álgebra graduada* com \wedge .

Pull back de tensores e formas: linear, tensorial, respeita \wedge :

$$F^* f := f \circ F, \quad \forall f \in \mathcal{F}(M),$$

$$F^*(\omega \wedge \sigma) = F^*\omega \wedge F^*\sigma,$$

$$(F \circ G)^* = G^* \circ F^*.$$

§12. Orientação e n – formas

Lembrar: Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ são bases de \mathbb{V}^n , $\beta(v_1, \dots, v_n) = \det C(B, B')\beta(v'_1, \dots, v'_n)$, $\forall \beta \in \Lambda^n(\mathbb{V}^n)$.

Dizemos que β *determina a orientação* $[B]$ se $\beta(v_1, \dots, v_n) > 0$.

OBS: M^n orientável \Leftrightarrow existe $\beta \in \mathcal{V}$, onde

$$\mathcal{V} = \{\sigma \in \Omega^n(M^n) : \sigma(p) \neq 0, \forall p \in M^n\}.$$

Orientações de $M \cong \mathcal{V}/\mathcal{F}_+(M)$.

Difeos que preservam/revertem orientação.

§13. Derivada exterior: VIP!!

Definição 3. A *derivada exterior* em $\Omega^\bullet(M)$ é a aplicação linear $d : \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $d(\Omega^k(M)) \subset \Omega^{k+1}(M)$;
2. $f \in \mathcal{F}(M) = \Omega^0(M) \Rightarrow df(X) = X(f), \forall X \in \mathcal{X}(M)$;
3. $\forall \omega \in \Omega^k(M), \sigma \in \Omega^\bullet(M) \Rightarrow d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma$;
4. $d^2 = 0$.

OBS: Props (2) + (3) + bump func.: $\omega|_U = 0 \Rightarrow d\omega|_U = 0$. Logo, $d\omega|_U = d(\omega|_U)$, e podemos fazer contas localmente.

OBS: Props (3) + (4) + indução $\Rightarrow d(df_1 \wedge \cdots \wedge df_k) = 0$.

OBS: d existe e é única: expressão em coordenadas.

Para toda $F : M \rightarrow N$ vale que (ver primeiro para Ω^0):

$$\boxed{F^* \circ d = d \circ F^*}$$

i.e., $F^* : \Omega^\bullet(N) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$ é um morfismo de álgebras diferenciais graduadas (i.e., preserva grau e comuta com d).

OBS: Isto também explica o porquê de $d\omega|_U = d(\omega|_U)$ via *inc**.

Exercício: $\forall k, \forall \omega \in \Omega^k(M), \forall Y_0, \dots, Y_k \in \mathcal{X}(M)$,

$$d\omega(Y_0, \dots, Y_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i Y_i \omega(Y_0, \dots, \hat{Y}_i, \dots, Y_k)$$

$$+ \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j], Y_0, \dots, \hat{Y}_i, \dots, \hat{Y}_j, \dots, Y_k).$$

Dado $X \in \mathcal{X}(M)$ definimos a *multiplicação interior*

$$i_X : \Omega^{k+1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)$$

por $(i_X \omega)(Y_1, \dots, Y_k) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_k)$.

- 1) $i_X \omega$ é tensorial (= $\mathcal{F}(M)$ -bilinear) em X e em ω .
- 2) $\forall \omega \in \Omega^k(M), \sigma \in \Omega^r(M)$,

$$i_X(\omega \wedge \sigma) = (i_X \omega) \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge (i_X \sigma).$$

- 3) $i_X \circ i_X = 0$.

§14. Variedades com bordo

Funções C^∞ e difeos sobre subconjuntos arbitrários $S \subset M^n$.

Proposição 4. *Seja $U \subset M^n$ aberto, $S \subset \hat{M}^n$ arbitrário, e $f : U \rightarrow S$ um difeomorfismo. Então, S é aberto em \hat{M}^n .*

Corolário 5. *Sejam U e V abertos de $\mathcal{H}^n := \mathbb{R}_+^n = \{x_n \geq 0\}$ e $f : U \rightarrow V$ um difeomorfismo. Então f leva pontos interiores (resp. de bordo) em pontos interiores (resp. de bordo).*

Variedade com bordo: definição. (Vaga idéia de *orbifold*).

Pontos interiores.

Bordo de $M = \partial M$ é variedade de dimensão $\dim(M) - 1$.

∂M vs bordo topológico.

Se $p \in \partial M$: $\mathcal{F}_p(M)$, T_p^*M , $v \in T_pM$ (mas pode não existir curva com $\alpha'(0) = v$), TM , orientação: tudo igual que antes.

Se $p \in \partial M$: $v \in T_p M$ interiores e exteriores.

OBS: Numa variedade com bordo M , considerando a inclusão $inc : \partial M \rightarrow M$ existe um campo exterior X ao longo de ∂M ($X \in \mathcal{X}_{inc}$). Logo, ∂M é orientável se M for, com uma orientação induzida dada por $inc^* i_X \omega$.

Exemplos: $\mathcal{H}^n, [a, b]; B^n, \overline{B^n}$.

Exemplo: Se $j = inc : \mathbb{S}^{n-1} = \partial \overline{B^n} \rightarrow \overline{B^n}$, $Z(p) = p \in \mathcal{X}_{inc}$ é exterior \Rightarrow orientação σ em $\mathbb{S}^{n-1} \subset \overline{B^n}$ via $\overline{B^n} \subset \mathbb{R}^n$ e $dv_{\mathbb{R}^n}$:

$$\sigma = j^*(i_Z dv_{\mathbb{R}^n}) = \sum_i (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n. \quad (2)$$

§15. Integração (Riemann)

Formas de sup. compacto = $\Omega_c^\bullet(M)$: preservadas por pullbacks.

Se $\omega \in \Omega_c^n(U)$, $U \subset \mathcal{H}^n$, temos $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ e definimos

$$\int_U \omega = \int_{\mathcal{H}^n} \omega := \int_{\mathcal{H}^n} f dx.$$

Pode fazer o mesmo para w n -forma contínua em U , $A \subset U$ limitado com bordo de medida nula (e.g., $A =$ cubo) $\Rightarrow \int_A \omega$.

$\xi : U \subset \mathcal{H}^n \rightarrow V \subset \mathcal{H}^n$ é difeo, e $\epsilon = 1$ (resp. -1) se ξ preserva (resp. reverte) orientação, (1) e T. de mudança de variáveis \Rightarrow

$$\begin{aligned} \int_U \xi^* \omega &= \int_U \xi^*(f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) \\ &= \int_U f \circ \xi (\xi^* dx_1 \wedge \cdots \wedge \xi^* dx_n) \\ &= \int_U f \circ \xi (d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n) \\ &= \int_U f \circ \xi \det(J_\xi) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \epsilon \int_V \omega. \end{aligned}$$

Def.: Se M^n está orientada, $\varphi : U \subset M^n \rightarrow \mathcal{H}^n$ carta orientada, e $w \in \Omega_c^n(U)$, definimos $\int_U \omega = \int_M \omega := \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* w$. Linear!

Def.: M^n orientada, $w \in \Omega_c^n(M^n) \Rightarrow \int_M \omega := \sum_\alpha \int_M \rho_\alpha w$.

TMV: $\int_N \varphi^* \omega = \int_M \omega$, $\forall \varphi \in \text{Dif}_+(N, M)$, $\forall w \in \Omega_c^n(M^n)$.

M^n orientada, temos o operador linear: $\omega \in \Omega_c^n(M^n) \mapsto \int_M \omega$.

O caso $\dim M = 0$: $\int_M f = \sum_i f(p_i) - \sum_j f(q_j)$.

$\int_{-M} \omega = - \int_M \omega$.

§16. Teorema de Stokes, versão 1.0

Teorema 6 (Stokes). M^n orientada, $w \in \Omega_c^{n-1}(M^n) \Rightarrow$

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Idéia subjacente: Somar integrais em cubos pequenos, que as faces interiores cancelam devido à orientação (ver dim 1 e 2).

Cor.: M^n compacta orientada $\Rightarrow \int_M d\omega = 0$, $\forall \omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$.

Exercício: Os teoremas clássicos do cálculo seguem de Stokes.

OBS (!!): $i : N^k \subset M$, N^k sub.reg. compacta orientada, e $\omega \in \Omega^k(M)$ (ou N^k orientada e $\omega \in \Omega_c^k(M)$) $\Rightarrow \int_N \omega (= \int_N i^* \omega)$.

Se $\rho \in \text{Dif}_+(N^k) \Rightarrow \int_N \rho^* \omega = \int_N \omega \Rightarrow$ só interessa o valor na imagem $i(N)$. Notação: $\int_i w := \int_N i^* \omega$.

Faz sentido para qualquer função diferenciável i : $\int_i w$ (mesmo para M não orientável!), e $\int_{i \circ \rho} w = \int_i w$ (só interessa $i(N)$).

Curiosidade: Teorema de Palais. Seja $D : \Omega^k \rightarrow \Omega^r$ tal que $Df^* = f^* D$, para toda $f : M \rightarrow N$.

Então, ou $k = l$ e $D = cId$, ou $r = k + 1$ e $D = cd$, ou $k = \dim M$, $r = 0$, e $D = c \int_M$.

§17. Outra forma de integrar (Spivak V.1 cap 8)

Se $I^k : [0, 1]^k \hookrightarrow \mathbb{R}^k$ é k -cubo, $c : [0, 1]^k \rightarrow M$ é k -cubo singular.

c k -cubo singular, $\omega \in \Omega^k(M) \Rightarrow \int_c \omega := \int_{[0,1]^k} c^* \omega$.

$C_k(M) = C_k(M; G) := k$ -cadeias de $M = G$ -módulo livre sobre os cubos singulares, para $G = \mathbb{R}$ (ou \mathbb{Z} ou \mathbb{Q} ou \mathbb{Z}_2 ou...).

$\int : C_k(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$ está definido $\forall M$ e é bilinear!

$I_{i,\alpha}^n(x_1, \dots, x_{n-1}) := I^n(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha, x_i, \dots, x_{n-1}), \alpha = 0, 1$.

$c_{i,\alpha} := c \circ I_{i,\alpha}^n, \partial c = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} c_{i,\alpha}$ (desenho dim 2).

Extender linearmente $\partial: C_k(M) \rightarrow C_{k-1}(M): \partial c = \text{bordo de } c$.

Defs: $c \in C_k(M)$ é fechada se $\partial c = 0$; c é um bordo se $c = \partial \tilde{c}$.

Exemplos: c_1, c_2 1-cubos. c_1 fechado $\Leftrightarrow c_1(0) = c_1(1)$; $c = c_1 - c_2$ é fechada $\Leftrightarrow c_1(0) = c_2(0)$ e $c_1(1) = c_2(1)$, ou c_1 e c_2 fechados.

Como $(I_{i,\alpha}^n)_{j,\beta} = (I_{j+1,\beta}^n)_{i,\alpha} \forall 1 \leq i \leq j \leq n-1 \Rightarrow \boxed{\partial^2 = 0}$.

O que provamos no Teorema 6 na verdade é o seguinte:

Teorema 7 (Stokes, versão 2.0). Para toda variedade diferenciável M , $w \in \Omega^{k-1}(M)$, e $c \in C_k(M)$, temos que

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Logo, ∂ nas k -cadeias (sobre \mathbb{R}) é o dual (com relação a \int) de d . Vale tudo igual considerando k -simplex em lugar de k -cubos.

FAZER EXERCÍCIOS DOS CAP. 8 E 11 DO SPIVAK!!

§18. Cohomologia de de Rham (Spivak, v1 cap8)

Se $w \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$, quando $w = df$ para certa $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$? Condição necessária: $dw = 0$. É suficiente?? SIM: pegando 1-cubo singular $c, c(0) = 0, c(1) = p$, definimos $f(p) = \int_c w$. Bem definida por Stokes(!), já que toda curva fechada em \mathbb{R}^n é bordo. De fato,

$c_s(t) = sc_1(t) + (1 - s)c_0(t)$. Ou seja, a solução de uma EDPs tem a ver com a *topologia* do espaço.

Lema de Poincaré (veremos depois): $Z^k(\mathbb{R}^n) = B^k(\mathbb{R}^n)$.

Localmente: sempre dá, mas globalmente *depende da topologia!*

Sistemas EDP lineares: Condição de integrabilidade.

Obstruções p/resolver EDPs, ou globalizar certos objetos locais.

$Z^k(M) := \text{Ker } d_k = \text{Formas fechadas}$ (condição local)

$B^k(M) := \text{Im } d_{k-1} = \text{Formas exatas}$ (condição global!)

Definição: A k -ésima *cohomologia de de Rham* da variedade M (com ou sem bordo) é

$$H^k(M) := Z^k(M)/B^k(M).$$

$H^0(M) = \mathbb{R}^r$, onde $r = \#$ componentes conexas de M .

$H^n(M^n) \neq 0$ se M^n é variedade compacta e orientável (Stokes).

$H^{n+k}(M^n) = 0, \forall k \geq 1$.

Ex: $\dim H^k(T^n) \geq \binom{n}{k}$: se $\omega_I := [d\theta_{i_1} \wedge \dots \wedge d\theta_{i_k}] \Rightarrow \int_{T_J} \omega_I = \delta_J^I$.

Pull-back: $F : M \rightarrow N \Rightarrow F^*(= F^\#) : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$.

$(F \circ G)^* = G^* \circ F^* \Rightarrow H^k(M)$ invariante da est. diferenciável(!).

$\wedge : H^k(M) \times H^r(M) \rightarrow H^{k+r}(M), [\omega] \wedge [\sigma] := [\omega \wedge \sigma]$ (boa).

$H^\bullet(M) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^k(M)$ é o *anel de cohomologia de M* .

De fato, $H^\bullet(M)$ é uma *álgebra graduada anticomutativa*, e F^* é um homomorfismo de álgebras graduadas.

§19. Invariância por homotopia (Spivak, v1 cap8)

Definição 8. Dadas duas variedades (com ou sem bordo) M e N , dizemos que $f, g : M \rightarrow N$ são (*diferenciavelmente*) *homotópicas* se existe uma função suave $T : M \times [0, 1] \rightarrow N$ tal que $T_0 := T \circ i_0 = f, T_1 := T \circ i_1 = g$, onde $i_s(p) = (p, s)$.

É relação de equivalência nas funções: $f \sim g$.

Exemplo: M é contrátil $\Leftrightarrow Id_M \sim cte$.

Proposição 9. *Se M é uma variedade com ou sem bordo, para todo k existe uma aplicação linear $\tau : \Omega^k(M \times [0, 1]) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ (chamada de homotopia de cocadeias) tal que*

$$i_1^* \omega - i_0^* \omega = d\tau\omega + \tau d\omega, \quad \forall \omega \in \Omega^k(M \times [0, 1]).$$

Prova: Defina $\tau(\omega) = \int_0^1 i_s^*(i_{\partial/\partial t}(\omega)) ds$. Basta ver dois casos (identifiquemos via π_1^* e π_2^*). Se $\omega = f dx_I$, $d\omega = \dots + (\partial f/\partial t) dt \wedge dx_I$, e portanto é o TFC. Se $\omega = f dt \wedge dx_I$, então $i_1^* \omega = i_0^* \omega = 0$, e continua $\Rightarrow d\tau\omega + \tau d\omega = 0$. ■

Mais do que diferenciável: $H^\bullet(M)$ é um invariante homotópico:

Teorema 10 (!!!!!). $f \sim g \Rightarrow f^* = g^*$ (em $H^\bullet(M)$).

Prova: Imediata da Proposição 9. (O mesmo vale para a homologia singular: ver Teorema 2.10 pag 111 em [Ha] e a prova). ■

Corolário 11. M contrátil $\Rightarrow H^k(M) = 0, \forall k \geq 1$.

Corolário 12. (Lema de Poincaré) $Z^k(\mathbb{R}^n) = B^k(\mathbb{R}^n) \forall k \geq 1$.

Corolário 13. M^n comp. orient. $n \geq 1 \Rightarrow M^n$ não contrátil.

Definição 14. $f : M \rightarrow N$ é uma *equivalência homotópica* se existe $g : N \rightarrow M$ tal que $g \circ f \sim Id_M$ e $f \circ g \sim Id_N$. Nesse caso, dizemos que M e N são *homotopicamente equivalentes*, ou que M e N *tem o mesmo tipo homotópico*: $M \sim N$.

Exemplo: M contrátil $\Leftrightarrow M \sim$ ponto.

Corolário 15 (!!!!!!). *Seja $f : M \rightarrow N$ uma equivalência homotópica entre variedades com ou sem bordo. Então $f^* : H^\bullet(M) \rightarrow H^\bullet(N)$ é um isomorfismo.*

Corolário 16. *Se M possui bordo, então $H^\bullet(M) = H^\bullet(M^\circ)$.*

Definição 17. Um *retrato* de M a uma subvariedade $S \subset M$ é uma função $f : M \rightarrow S$ tal que $f|_S (= f \circ inc_S) = Id_S$. S é chamado de *retrato* de M ($\Rightarrow f^*$ é injetiva, e inc_S^* é sobre).

Teorema 18 (do ponto fixo de Brouwer). *Se $B \subset \mathbb{R}^n$ é uma bola fechada (ou conjunto compacto convexo), então toda função contínua $f : B \rightarrow B$ possui pontos fixos.*

Exercício. Provar que se M é compacta e orientável não existe retração $f : M \rightarrow \partial M$.

Definição 19. Um *retrato por deformação* de M a $S \subset M$ é uma função $T : M \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que $T_0 = Id_M$, $\text{Im}(T_1) \subseteq S$, e $T_1|_S = Id_S$ (i.e., retrato $T_1 \sim T_0 = Id_M \Rightarrow T_1^*$ e inc_S^* são iso).

Em outras palavras, um retrato por deformação é uma homotopia entre retrato de M a S e a identidade de M . Em particular, se S é um retrato por deformação de M , então $M \sim S$.

Corolário 20. *Se E é um fibrado vetorial sobre M , então $H^\bullet(E) = H^\bullet(M)$.*

Aplicação: Vizinhanças tubulares. Dada $N \subset M$ uma subvariedade compacta e mergulhada, para cada $0 < \epsilon < \epsilon_0$ existe aberto $N \subset V_\epsilon \subset M$, tal que N é um retrato por deformação de V_ϵ , $V_\epsilon \subset V_{\epsilon'}$ se $\epsilon < \epsilon'$, e $\bigcap_\epsilon V_\epsilon = N$. (Prova: usar o teorema de Whitney para M , ou métricas Riemannianas; ver Teorema 5.2 em [Hr]). Em particular, $H^\bullet(V_\epsilon) = H^\bullet(N)$.

Definição 21. Um *retrato por deformação forte* é um retrato por deformação T como na Definição 19 tal que $T_t|_S = Id_S$, $\forall t \in [0, 1]$ (e.g, H embaixo).

Exemplo: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim \mathbb{S}^{n-1} \not\sim \mathbb{R}^n$: $H(x, t) = ((1 - t) + t/\|x\|)x$.

Exemplo: Faixa Möbius $F \sim \mathbb{S}^1$ ($\Rightarrow H^2(F) = 0$).

§20. Integrando em cohomologia: grau (Spivak, v1 cap8)

Para M não compactas (e sem bordo) trabalhamos também com

$$H_c^k(M) := Z_c^k(M)/B_c^k(M), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

OBS: M^n orientável $\Rightarrow \int : H_c^n(M^n) \rightarrow \mathbb{R}$ bem definida e linear.

Teorema 22. *Se M^n é variedade conexa e orientável, então $\int : H_c^n(M^n) \rightarrow \mathbb{R}$ é um isomorfismo ($\Rightarrow \dim H_c^n(M^n) = 1$).*

Prova: Temos que ver que se $\int_M \omega = 0$, então $\omega = d\beta$ com β com suporte compacto.

(a) Vale para $M = \mathbb{R}$. Se $g(t) = \int_{-\infty}^t \omega \Rightarrow \omega = dg$.

(b) Se vale para \mathbb{S}^{n-1} , vale para \mathbb{R}^n . Se $\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n) \subset \Omega^n(\mathbb{R}^n)$, como \mathbb{R}^n é contrátil $\omega = d\eta$ para alguma $\eta \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ (mas η não tem nec. sup. compacto!). Agora, se ω tem sup. compacto (SPG, na bola B_1^n) e $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$, temos $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} j^* \eta' = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} i^* \eta = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$ pelo teorema de Stokes, onde $i : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $j : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ são as inclusões, e $\eta' = \eta|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$. Logo, por hipótese, $j^*[\eta'] = 0$. Mas j^* é um isomorfismo pois \mathbb{S}^{n-1} é retrato por deformação de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Concluimos que $\eta' = d\lambda$ para alguma $\lambda \in \Omega^{n-2}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Em particular, se $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

satisfaz $h \equiv 1$ fora de B_1^n e $h \equiv 0$ em B_ϵ^n , $\beta = \eta - d(h\lambda) \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ tem suporte em B_1^n , e $\omega = d\beta$.

Uma outra prova, mais explícita, de **(b)**: Se $\omega = f dv_{\mathbb{R}^n} \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ tem sup. compacto (SPG, em bola B_1^n), então definimos $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(p) = \int_0^1 t^{n-1} f(tp) dt$, $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, $r(x) = x/\|x\|$ (retração), $i : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a inclusão e $\sigma = i_X dv_{\mathbb{R}^n} \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ como em (2).

- Conta $\Rightarrow w = d(g\sigma)$ (porém $g\sigma$ não tem nec. sup. compacto!)
- $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} (g \circ i) i^* \sigma = \int_{B_1^n} f dv_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0 \Rightarrow i^*(g\sigma) = d\lambda$, por hipótese.
- $g\sigma = r^*(i^*(g\sigma)) = d(r^*\lambda)$ fora de B_1^n , pois $(i \circ r)_{*p} = \|p\|^{-1} \Pi_{p^\perp}$, $(i \circ r)^* \sigma(p) = \|p\|^{-n} \sigma(p)$, e $g(p) = \|p\|^{-n} (g \circ i \circ r)(p)$, se $\|p\| \geq 1$.
- Se $\beta := g\sigma - d(hr^*\lambda) \Rightarrow w = d(g\sigma) = d\beta$, com $\text{sup}(\beta) \subseteq B_1^n$.

(c) (!!!) *Se vale para \mathbb{R}^n vale para toda M^n .* Fixemos qualquer $w_0 \in \Omega_c^n(U_0)$ com $U_0 \subset M^n$ difeo a \mathbb{R}^n , tal que $\int_M w_0 \neq 0$. Seja $w \in \Omega_c^n(M^n)$. Basta ver que existe $a \in \mathbb{R}$ e $\eta \in \Omega_c^{n-1}(M^n)$ tais que $w = aw_0 + d\eta$. Pegando partições da unidade podemos supor que $\text{sup}(w) \subset U$, U difeo a \mathbb{R}^n . Como M^n é conexa, existe uma sequência $\{U_i, 1 \leq i \leq m\}$, U_i difeo a \mathbb{R}^n com $U_m = U$ e $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$. Seja w_i com suporte compacto, $\text{sup}(w_i) \subset U_i \cap U_{i+1}$, e tal que $\int_M w_i \neq 0$. Como vale para $\mathbb{R}^n \cong U_{i+1}$, $w_{i+1} - c_{i+1}w_i = d\eta_{i+1}$. Pronto! ■

Teorema 23. M^n conexa não orientável $\Rightarrow H_c^n(M^n) = 0$.

Prova: Usar a idéia em **(c)** acima. ■

Exercício. Provar o Teorema 23 usando o recob. duplo orientável $\pi : \tilde{M}^n \rightarrow M^n$.

Teorema 24. M^n conexa não compacta com ou sem bordo $\Rightarrow H^n(M^n) = 0$.

Prova: Usar a idéia em **(c)**. Supor M^n orientável e usar exaustão por compactos (ou pelo Teorema 51), e para M^n não orientável, provar que $\pi^* : H^n(M^n) \rightarrow H^n(\tilde{M}^n)$ é injetiva. ■

Pelo Teorema 22, para qualquer função diferenciável própria entre variedades conexas orientadas, $f : M^n \rightarrow N^n$ (mesma dimensão!), existe um número $\deg(f) \in \mathbb{R}$, o *grau de f* , tal que

$$\int_M f^* \omega = \deg(f) \int_N \omega, \quad \forall \omega \in \Omega_c^n(N^n).$$

Teorema 25. *Nas hipóteses acima, se $q \in N^n$ é um valor regular de f e $f(p) = q$, definimos $\text{sgn}_f(p) = \pm 1$, de acordo se f_{*p} preserva ou reverte a orientação. Então,*

$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{sgn}_f(p).$$

Em particular, $\deg(f) \in \mathbb{Z}$, e $\deg(f) = 0$ se f não for sobre.

Prova: Se $\{p_1, \dots, p_k\} = f^{-1}(q)$, escolhamos vizinhanças pequenas e disjuntas U_i de p_i e V de q tais que $f : U_i \rightarrow V$ é difeo. Seja ω com suporte compacto em V e tal que $\int_N \omega \neq 0$. Então, $\int_{U_i} f^* \omega = \text{sgn}_f(p_i) \int_V \omega$. Logo, o resultado é imediato... se valesse que $\text{supp}(f^* \omega) \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$. Mas se conserta assim: Seja $K \subset V$ compacto tal que $q \in K^\circ$. Então, $K' = f^{-1}(K) \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_k)$ é compacto, e logo $f(K')$ é fechado e não contém q . Basta agora trocar V por qualquer $V' \subset K^\circ \setminus f(K') \subset K$ com $q \in V'$ que automaticamente satisfaz $f^{-1}(V') \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$. ■

OBS: {Valores regulares} é aberto e denso, e a soma é finita.

OBS: $H_c^n(M^n) \not\subset H^n(M^n)$ em geral: $H_c^n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, porém $H^n(\mathbb{R}^n) = 0$, $n \geq 1$. De fato, $f \sim g \not\Rightarrow f^* = g^*$ em H_c^\bullet . Mas:

Corolário 26. $f, g : M^n \rightarrow N^n$ como acima, $f \sim g$ (propriamente homotópicas) $\Rightarrow \deg(f) = \deg(g)$.

Exemplo: $\deg(-Id_{\mathbb{S}^n}) = (-1)^{n+1}$.

Corolário 27. *Teorema do cachorro peludo 2n-dimensional.*

OBS: Podemos sempre pentear cachorros de dimensão ímpar.

Corolário 28. *Teorema Fundamental da Álgebra.*

Prova: Estender $g(z) = z^k + a_1z^{k-1} + \dots + a_k$ a $\mathbb{C} \cup \infty = \mathbb{S}^2$ via $g(\infty) = \infty$. É suave pois $1/g(1/z) = \frac{z^k}{1+a_1z+\dots+a_kz^k}$, e é homotópica a $h(z) = z^k$ via $g_t(z) = z^k + t(a_1z^{k-1} + \dots + a_k)$.

Seja $w = f(r)dx \wedge dy = f(r)rdr \wedge d\theta$ com f com suporte compacto. Logo, $\int_{\mathbb{R}^2} h^*w = k \int_{\mathbb{R}^2} w \Rightarrow \deg(g) = \deg(h) = k > 0 \Rightarrow g$ é sobrejetora.

Outra forma: h é difeo local que preserva orientação em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, e $\forall u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $h^{-1}(u)$ possui k pontos $\Rightarrow \deg(h) = k$. ■

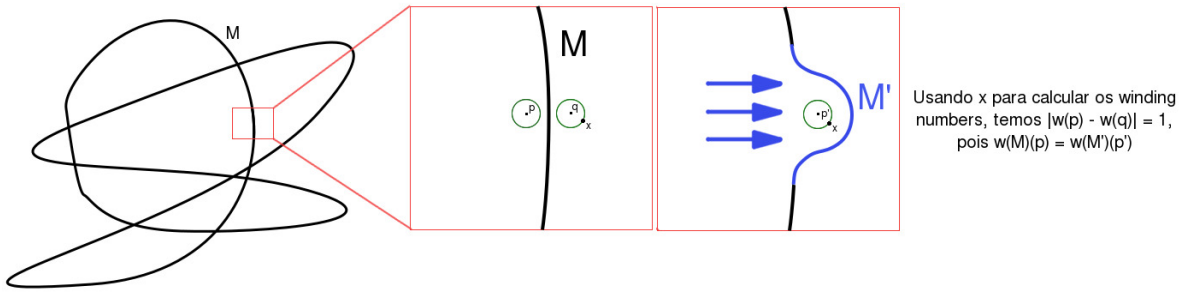
§21. Aplicação: winding number (vídeo 25)

$f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ imersão de variedade compacta conexa e orientável, $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus M^n$, $r > 0$ tal que $\overline{B_r(p)} \cap M^n = \emptyset \Rightarrow \pi \circ f : M^n \rightarrow \partial B_r(p) \cong \mathbb{S}^n \Rightarrow w(p) := \deg(\pi \circ f) \in \mathbb{Z}$ é o *winding number de M^n ao redor de p* (independe de r) $\Rightarrow w$ é constante em cada componente conexa de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M^n$.

Ver para curvas, em particular, o efeito da orientação.

M^n é não orientável? Teorema 25 \Rightarrow winding number mod 2: exercícios 23 a 26 Spivak cap.8: $f : M^n \times I \rightarrow N^n$ homotopia, $y \in N^n$ valor regular de f , $f_0, f_1 \Rightarrow \#f_0^{-1}(y) = \#f_1^{-1}(y) \pmod{2}$. Desenho $\Rightarrow w$ nunca é constante e pula ao atravessar $M^n \Rightarrow$

Corolário 29. M^n orientável ou não, $b_0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus M^n) \geq 2$.



§22. Motivação do conceito de sequência exata

Sejam $U, V \subset M$ abertos tais que $M = U \cup V$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow i_U : U \hookrightarrow M$, $j_U : U \cap V \hookrightarrow U \Rightarrow i_U^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(U)$, $j_U^* : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^k(U \cap V)$. Idem para i_V, j_V . Temos então:

$$i = i_U^* \oplus i_V^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V),$$

$$j = j_V^* \circ \pi_2 - j_U^* \circ \pi_1 : \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U \cap V),$$

i.e., $i(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V)$, $j(\sigma, \omega) = j_V^* \omega - j_U^* \sigma = \omega|_{U \cap V} - \sigma|_{U \cap V}$.

Juntando, temos

$$0 \rightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{i} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j} \Omega^k(U \cap V) \rightarrow 0, \quad (3)$$

com cada imagem contida no núcleo da seguinte. Agora, o ponto importante é que, de fato, são iguais! (o único não óbvio é que j é sobre, mas, se $\{\rho_U, \rho_V\}$ é partição da unidade subordinada a $\{U, V\}$ e $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$, então $\omega_U := \rho_V \omega \in \Omega^k(U)$, $\omega_V := \rho_U \omega \in \Omega^k(V)$, e $j(-\omega_U, \omega_V) = \omega$).

§23. Complexos e sequências exatas (Spivak, v1, cap.11)

Sequências exatas (esp. vet. ou grupos abelianos): curta, longa.

Exercício. O dual de uma sequência exata é exata.

$$\begin{aligned}
A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0 &\Leftrightarrow f \text{ epimorfismo} \\
0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B &\Leftrightarrow f \text{ monomorfismo} \\
0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0 &\Leftrightarrow f \text{ isomorfismo} \\
A \xrightarrow{f} B \rightarrow C \rightarrow 0 &\Rightarrow C \cong B/\text{Im } f \\
0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 &\Rightarrow C \cong B/A
\end{aligned}$$

Proposição 30. (Teorema da dimensão na álgebra linear) Se $0 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{V}_1 \xrightarrow{\beta} \mathbb{V}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{V}_k \rightarrow 0$ é exata $\Rightarrow \sum_i (-1)^i \dim \mathbb{V}_i = 0$.

Prova: Indução em k , trocando por $0 \rightarrow \mathbb{V}_2/\text{Im } \alpha \xrightarrow{\beta[\cdot]} \mathbb{V}_3 \rightarrow \dots$ ■

Complexo de cocadeias: $\mathcal{C} = \{C^k\}_{k \in \mathbb{Z}} + \text{‘diferenciais’ } \{d_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$\dots C^{-1} \xrightarrow{d_{-1}} C^0 \xrightarrow{d_0} C^1 \xrightarrow{d_1} C^2 \dots, \quad d_k \circ d_{k-1} = 0.$$

Soma direta de complexos de cocadeias.

$a \in C^k$ é uma k -cocadeia de \mathcal{C} .

$a \in Z^k(\mathcal{C}) := \text{Ker } d_k \subset C^k$ é um k -cociclo de \mathcal{C} .

$a \in B^k(\mathcal{C}) := \text{Im } d_{k-1} \subset C^k$ é um k -cobordo de \mathcal{C} .

A k -ésima cohomologia de \mathcal{C} é dada por

$$H^k(\mathcal{C}) := Z^k(\mathcal{C})/B^k(\mathcal{C}).$$

Se $a \in Z^k(\mathcal{C}) \Rightarrow [a] \in H^k(\mathcal{C})$ é a classe de cohomologia de a .

Um mapa de cocadeias $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é uma sequência $\{\varphi_k : A^k \rightarrow B^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tal que $d \circ \varphi_k = \varphi_{k+1} \circ d$. Isto nos dá aplicações $\varphi^* : H^\bullet(\mathcal{A}) \rightarrow H^\bullet(\mathcal{B})$. A sequência $0 \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{j} \mathcal{C} \rightarrow 0$ é dita *exata curta* se em cada nível k ela for exata. Neste caso,

$$H^k(\mathcal{A}) \xrightarrow{i^*} H^k(\mathcal{B}) \xrightarrow{j^*} H^k(\mathcal{C})$$

é exata para todo k . Mas não é exata com 0 à direita ou à esquerda... Porém:

Teorema 31 (!!!!!!!). Se $0 \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{j} \mathcal{C} \rightarrow 0$ é exata curta, então existem homomorfismos (explícitos e naturais)

$$\delta^* : H^k(\mathcal{C}) \rightarrow H^{k+1}(\mathcal{A}),$$

chamados homomorfismos de conexão, e que dão origem à seguinte sequência longa de cohomologia:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \rightarrow & H^{k+1}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{i^*} & \cdots & , & \\
 & & \searrow & & \delta^* & & \searrow \\
 & \rightarrow & H^k(\mathcal{A}) & \xrightarrow{i^*} & H^k(\mathcal{B}) & \xrightarrow{j^*} & H^k(\mathcal{C}) & \rightarrow \\
 & & \searrow & & \delta^* & & \searrow \\
 & & & & \cdots & \xrightarrow{j^*} & H^{k-1}(\mathcal{C}) & \rightarrow
 \end{array}$$

Prova: (“Perseguição”: fazer com alunos) Dada $c \in Z^k(\mathcal{C})$, existe $b \in B^k$ tal que $jb = c$. Mas então $db \in \text{Ker } j$ ($jdb = djb = dc = 0$), e, como $\text{Ker } j = \text{Im } i$, existe $a \in A^{k+1}$ tal que $db = ia$ (dada b , a é única pois i é injetiva). Agora, $ida = dia = d^2b = 0 \Rightarrow da = 0$. Definimos então $\delta^*[c] := [a]$ (independe das escolhas de b e c).

Vejam agora, e.g., que a sequência longa é exata em $H^k(\mathcal{C})$.

- $\text{Im } j^* \subset \text{Ker } \delta^*$: Para $[b] \in H^k(\mathcal{B})$, temos $\delta^*j^*[b] = \delta^*[jb]$. Pela definição de δ^* , podemos pegar como o b que leva a $c = jb$ o próprio b . Mas b é um cociclo: $db = 0$. Portanto, na definição de δ^* , $ia = db = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \delta^*[jb] = [0] = 0$. (Idem $i^*\delta^* = 0$).

- $\text{Ker } \delta^* \subset \text{Im } j^*$: Se $\delta^*[c] = 0$, o a na definição de δ^* é um cobordo e o b um cociclo: $a = da'$, pelo que $db = ida' = dia'$, i.e., $d(b - ia') = 0$. Mas então $j^*[b - ia'] = [jb - jia'] = [jb] = [c]$. ■

§24. A sequência de Mayer-Vietoris

Como vimos, (3) é exata para todo k , logo temos como corolário:

Teorema 32 (!!!!). *A seguinte sequência longa de cohomologia, chamada de sequência de Mayer-Vietoris, é exata:*

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow H^0(M) \xrightarrow{i^*} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{j^*} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\delta^*} \dots \\
\dots \\
\dots \xrightarrow{\delta^*} H^k(M) \xrightarrow{i^*} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{j^*} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta^*} \\
\xrightarrow{\delta^*} H^{k+1}(M) \xrightarrow{i^*} H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \xrightarrow{j^*} H^{k+1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta^*} \dots
\end{aligned}$$

E, pelo mesmo preço, temos uma receita para construir δ^* :

- Se $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$, com part. da unidade conseguimos formas ω_U e ω_V em U e V tais que $j(-\omega_U, \omega_V) = \omega_V|_{U \cap V} + \omega_U|_{U \cap V} = \omega$;
- Agora, se ω for fechada, $-d\omega_U$ e $d\omega_V$ coincidem em $U \cap V$ (!!!), já que $j(-d\omega_U, d\omega_V) = dj(-\omega_U, \omega_V) = d\omega = 0$;
- Logo, $-d\omega_U$ e $d\omega_V$ definem uma forma $\sigma \in \Omega^{k+1}(M)$, que é obviamente fechada (mas não necessariamente exata!). Então, temos que $\delta^*[\omega] = [\sigma] \in H^{k+1}(M)$.

OBS: Se U, V e $U \cap V$ são conexos começamos em $k = 1$, i.e.,

$$0 \rightarrow H^0(M) \xrightarrow{i^*} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{j^*} H^0(U \cap V) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow H^1(M) \xrightarrow{i^*} H^1(U) \oplus H^1(V) \xrightarrow{j^*} \dots$$

são exatas (pois M é conexa, e $H^0(U \cap V) \xrightarrow{\delta^*} H^1(M)$ é a função nula, já que $j^* : H^0(U) \oplus H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V)$ é sobre).

Exemplos: $M = \bigcup_i M_i$ disjunta $\Rightarrow H^k(M) = \bigoplus_i H^k(M_i)$, $H^\bullet(\mathbb{S}^n)$, $H^\bullet(T^2)$.

§25. A característica de Euler

Nesta seção vamos supor que todas as cohomologias de M têm dimensão finita (veremos que isto acontece se M for compacta).

Definição 33. A *característica de Euler* de M é o invariante homotópico

$$\chi(M) := \sum_i (-1)^i b_i(M) \in \mathbb{Z},$$

onde $b_k(M) := \dim H^k(M)$ é o k -ésimo número de Betti de M .

Mayer-Vietoris + Proposição 30 \Rightarrow

$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V). \quad (4)$$

Simplex \Rightarrow triangulações: sempre existe (pela base enumerável).

Teorema 34. Para qualquer triangulação de M^n vale que

$$\chi(M^n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_k,$$

onde $\alpha_k = \alpha_k(\mathcal{T})$ é o número de k -simplex em \mathcal{T} .

Prova: Para cada n -simplex σ_i de \mathcal{T} , sejam $p_i \in \sigma_i^o$ e uma bolinha $p_i \in B_{p_i} \subset \sigma_i^o$ (pensar p_i como bolinha também). Seja U_1 a união disjunta destas α_n bolinhas, e $V_{n-1} = M \setminus \{p_1, \dots, p_{\alpha_n}\}$. Logo, (4) $\Rightarrow \chi(M^n) = \chi(V_{n-1}) + (-1)^n \alpha_n$.

Agora, para cada $(n-1)$ -face τ_j de \mathcal{T} , pegue uma bolinha “longa” B_{τ_j} unindo as duas B_{p_i} ’s de cada n -simplex adjacente a τ_j . Chame de U_2 à união destas α_{n-1} bolinhas (disjuntas). Pegue também um arco (dentro de B_{τ_j}) unindo os bordos das duas B_{p_i} ’s, e seja V_{n-2} o complemento destes α_{n-1} arcos. De novo, (4) $\Rightarrow \chi(V_{n-1}) = \chi(V_{n-2}) + (-1)^{n-1} \alpha_{n-1}$.

Indutivamente, temos V_{n-3}, \dots, V_0 , este último sendo uma união de α_0 conjuntos contráteis (cada um vizinhança de um vértice de \mathcal{T}), de onde $\chi(V_0) = \alpha_0$ e $\chi(V_k) = \chi(V_{k-1}) + (-1)^k \alpha_k$. ■

Corolário 35. (*Descartes-Euler*) *Se um poliedro convexo tem V vértices, F faces, e E arestas, então $V - E + F = 2$.*

Corolário 36. *Só existem 5 sólidos Platônicos.*

Prova: Se $r \geq 3$ é o número de arestas (= vértices) em cada face, e $s \geq 3$ é o número de arestas (= faces) que chegam a cada vértice, temos que $rF = 2E = sV$. Mas $V - E + F = 2 \Rightarrow 1/s + 1/r = 1/E + 1/2 > 1/2$, ou $(r-2)(s-2) < 4$. Como $F = 4s/(2s + 2r - sr)$ temos $(r, s) = (3,3) = \text{tetraedro} = \text{Fogo}$, $(4,3) = \text{cubo} = \text{Terra}$, $(3,4) = \text{octaedro} = \text{Ar}$, $(3,5) = \text{icosaedro} = \text{Agua}$, e $(5,3) = \text{dodecaedro} \dots$ que, segundo Platão, foi “...usado por Deus para distribuir as $(12!)$ constelações no Universo” (não consegui completar a prova desta afirmação). ■



Modelo Platônico do sistema solar por Kepler; Circogonia icosahedra; Pedras de 2000 AC

FORTE CONSELHO: Assistir este vídeo sobre a vida de Kepler, da espetacular série **Cosmos** (a dos anos '80!).

OBS: Em dimensão $n = 4$ tem 6 sólidos regulares (tem um com 24 faces), e para $n \geq 5$ tem só 3: o simplex (tetraedro), o hipercubo (claro), e o hiperoctaedro, que é a cápsula convexa de $\{\pm e_i\}$.

§26. Mayer-Vietoris para suporte compacto

Não podemos simplesmente trocar H^k por H_c^k em Mayer-Vietoris, pois $\omega \in \Omega_c^k(M) \not\rightarrow i_U^*(\omega) \in \Omega_c^k(U)$. Porém, se $\omega \in \Omega_c^k(U)$, a extensão como 0 de ω , $\hat{i}_U(\omega)$, satisfaz $\hat{i}_U(\omega) \in \Omega_c^k(M)$. E isto funciona! ($j := \hat{j}_U \oplus \hat{j}_V$, $i := \hat{i}_U - \hat{i}_V$):

Lema 37. *A seguinte seqüência é exata $\forall k$ (exercício fácil):*

$$0 \rightarrow \Omega_c^k(U \cap V) \xrightarrow{j} \Omega_c^k(U) \oplus \Omega_c^k(V) \xrightarrow{i} \Omega_c^k(U \cup V) \rightarrow 0.$$

Logo, Teorema 31 + Lema 37 \Rightarrow

Teorema 38. *A seguinte seqüência longa é exata:*

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\delta^*} H_c^k(U \cap V) \xrightarrow{j^*} H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \xrightarrow{i^*} H_c^k(M) \xrightarrow{\delta^*} \\ &\xrightarrow{\delta^*} H_c^{k+1}(U \cap V) \xrightarrow{j^*} H_c^{k+1}(U) \oplus H_c^{k+1}(V) \xrightarrow{i^*} H_c^{k+1}(M) \xrightarrow{\delta^*} \dots \end{aligned}$$

OBS: Comparar as duas Mayer-Vietoris.

OBS: CUIDADO PARA NÃO MISTURAR/CONFUNDIR!!!

OBS: O Teorema 31 é uma fábrica de teoremas!

§27. Mayer-Vietoris para pares

Seja $i : N \hookrightarrow M$ uma subvariedade compacta e mergulhada, e $k \in \mathbb{Z}$. Então, $W = M \setminus N$ é uma variedade e portanto temos

$$\Omega_c^k(M \setminus N) \xrightarrow{\hat{j}_W} \Omega_c^k(M) \xrightarrow{i^*} \Omega^k(N).$$

Mas esta não é exata em $\Omega_c^k(M)$: o núcleo de i^* são as formas que se anulam em N , enquanto que a imagem de \hat{j}_W são as que se anulam em vizinhança de N . Mas isto se conserta assim:

Seja V uma viz. tubular com fecho compacto de N , $j : N \hookrightarrow V$ a inclusão, e $\pi : V \rightarrow N$ um retrato por deformação, i.e., $\pi \circ j = id_N$, $j \circ \pi \sim id_V$. Construimos agora uma sequência de tais V , $V = V_1 \supset V_2 \supset \dots$ com $\bigcap_i V_i = N$. Então, dizemos que ω e ω' em $\Omega^k(U)$ para algum aberto $U \subset M$ contendo N são *equivalentes* se existe $r > i, j$ tal que $\omega|_{V_r} = \omega'|_{V_r}$. O conjunto destas classes forma um espaço vetorial $\mathcal{G}^k(N)$, o dos “*germes de k-formas definidas numa vizinhança de N*”, que tem seu diferencial obvio induzido por d , e é portanto um complexo de cocadeias $\mathcal{G} = (\mathcal{G}^\bullet(N), d)$. Isto dá um mapa de cocadeias $\Omega_c^k(M) \xrightarrow{\hat{i}^*} \mathcal{G}^k(N)$, onde $\hat{i}^*(\omega) =$ classe de $\omega|_{V_1}$.

Lema 39. *A seguinte sequência é exata (outro exercício):*

$$0 \rightarrow \Omega_c^k(M \setminus N) \xrightarrow{\hat{j}_W} \Omega_c^k(M) \xrightarrow{\hat{i}^*} \mathcal{G}^k(N) \rightarrow 0.$$

Agora, como $j^* : H^k(V_i) \rightarrow H^k(N)$ é isomorfismo para todo i e para todo k , $H^k(N)$ é isomorfo a $H^k(\mathcal{G})$ (exercício). Logo, Teorema 31 + Lema 39 \Rightarrow

Teorema 40. *Existe uma sequência longa exata:*

$$\cdots \rightarrow H_c^k(M \setminus N) \rightarrow H_c^k(M) \rightarrow H^k(N) \xrightarrow{\delta^*} H_c^{k+1}(M \setminus N) \rightarrow \cdots$$

De maneira totalmente análoga ao Teorema 40, temos:

Teorema 41. *Seja M uma variedade com bordo compacto. Então existe uma sequência longa exata:*

$$\cdots \rightarrow H_c^k(M \setminus \partial M) \rightarrow H_c^k(M) \rightarrow H^k(\partial M) \xrightarrow{\delta^*} H_c^{k+1}(M \setminus \partial M) \rightarrow \cdots$$

Corolário 42. $H_c^k(\mathbb{R}^n) \cong H^{n-k}(\mathbb{R}^n) \cong (H^{n-k}(\mathbb{R}^n))^*$, $\forall k$.

Prova: Pelo Corolário 16, se $B \subset \mathbb{R}^n$ é bola aberta, $H_c^k(\mathbb{R}^n) = H_c^k(B) \cong H_c^k(\overline{B}) = H^k(\overline{B}) = H^k(B) = 0$, $\forall k \neq n$. ■

Exercício: Calcular $H^\bullet(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)$. Sug: $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m = \partial(\overline{B} \times \mathbb{S}^m)$.

§28. Aplicação: o Teorema de Jordan generalizado

Teorema 43 (Jordan generalizado). *Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta, conexa e mergulhada. Então, M^n é orientável, $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M^n$ tem exatamente 2 comp. conexas, uma limitada e a outra não, e M^n é o bordo de cada uma.*

Prova: Pelo Teorema 40 e Corolário 42 temos que

$$0 \cong H_c^n(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow H^n(M^n) \rightarrow H_c^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus M) \rightarrow H_c^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}) \cong \mathbb{R} \rightarrow 0.$$

Isto é, $\dim H^n(M^n) + 1 = b_0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus M^n) \geq 2$ (Corolário 29). Portanto, pelo Teorema 22 e Teorema 23, $H^n(M^n) \cong \mathbb{R}$, M^n é

orientável, e $\#$ comp.conexas de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M^n = 2$. Ainda pelo mesmo argumento com winding numbers, todo ponto de M^n está arbitrariamente perto de pontos nas duas componentes conexas. ■

Corolário 44. *Nem a garrafa de Klein, nem o plano projetivo possuem mergulhos em \mathbb{R}^3 .*

§29. Dualidade de Poincaré

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e estrelado em relação a 0, i.e.,

$$U = U_\rho = \{tx : 0 \leq t < \rho(x), x \in \mathbb{S}^{n-1}\}$$

para alguma função limitada $\rho : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$.

Lema 45. *Se $\rho \in C^\infty$, U é difeomorfo a \mathbb{R}^n .*

Prova: SPG, $\rho \geq 1$, e basta pegar o difeomorfismo $h: B_1 \rightarrow U$ como $h(tx) = (t + (\rho(x) - 1)f(t))x$, para qualquer função diferenciável f com $f = 0$ em $[0, \epsilon)$, $f' \geq 0$, $f(1) = 1$. ■

Agora, ρ pode nem mesmo ser contínua... Mas é semi-contínua:

Lema 46. *Dado $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $\epsilon > 0$, existe viz. $V_x = V(x, \epsilon)$ de x tal que $\rho|_{V_x} > \rho(x) - \epsilon$. (Prova: U é aberto).*

Lema 47. *$H^\bullet(U) \cong H^\bullet(\mathbb{R}^n)$ e $H_c^\bullet(U) \cong H_c^\bullet(\mathbb{R}^n)$. (De fato, U é difeomorfo a \mathbb{R}^n mesmo que ρ não seja C^∞ , mas é difícil).*

Prova: O primeiro é obvio pois U é contrátil. Pelo Corolário 42 basta ver então $H_c^k(U) = 0$ para $k < n$. Mas se $[\omega] \in H_c^k(U)$, suponhamos que existe $\bar{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $K = \text{supp}(\omega) \subset U_{\bar{\rho}} \subset U$ (isto é, $\bar{\rho} < \rho$). Então $U_{\bar{\rho}} \cong \mathbb{R}^n$ e $[\omega] \in H_c^k(U_{\bar{\rho}}) = 0$. Logo, existe $\eta \in \Omega_c^{k-1}(U_{\bar{\rho}}) \subset \Omega_c^{k-1}(U)$ tal que $\omega = d\eta$.

Para provar que existe tal $\bar{\rho}$, seja $2\epsilon = d(K, \mathbb{R}^n \setminus U) > 0$ e, para $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, $t(x) := \max\{t : tx \in K\} \leq \rho(x) - 2\epsilon$. Em viz. V_x de x temos que $t|_{V_x} < \rho(x) - \epsilon < \rho|_{V_x}$ pelo Lema 46 e a definição de ϵ . Pegamos um subcobrimento finito $\{V_{x_i}\}$ de \mathbb{S}^{n-1} e uma partição da unidade $\{\varphi_i\}$ subordinada a ele, e definimos $\bar{\rho} = \sum_i (\rho(x_i) - \epsilon)\varphi_i$. Logo, $t < \bar{\rho} < \rho$, e $K \subset U_{\bar{\rho}} \subset U$. ■

Definição 48. Dizemos que M^n tem *tipo finito* se existe um cobrimento finito \mathcal{U} de M^n tal que toda interseção V não vazia de elementos de \mathcal{U} satisfaz que $H^\bullet(V) = H^\bullet(\mathbb{R}^n)$ e $H_c^\bullet(V) = H_c^\bullet(\mathbb{R}^n)$. Um tal cobrimento \mathcal{U} se diz *bacana*.

Lema 49. *Toda variedade compacta tem cobrimento bacana.*

Prova: Viz. totalmente normais (Geometria Riemanniana). ■

Proposição 50. *Se M tem tipo finito (e.g. M compacta), então $H^\bullet(M)$ e $H_c^\bullet(M)$ têm dimensão finita.*

Prova: Indução em $\#\mathcal{U}$ usando Mayer-Vietoris. ■

Agora, observando que $H^k(M) \wedge H_c^r(M) \subset H_c^{k+r}(M)$, temos:

Teorema 51 (Dualidade de Poincaré). *Se M^n é conexa e orientável, a função linear $PD: H^k(M) \rightarrow (H_c^{n-k}(M))^*$,*

$$PD([\omega])([\sigma]) := \int_M \omega \wedge \sigma$$

é um isomorfismo, para todo k .

Prova: A prova para variedades de tipo finito segue por indução no número de elementos de um cobrimento bacana usando o seguinte Lema. ■

Lema 52. *Se U e V são abertos tais que PD é isomorfismo para todo k em U , V e $U \cap V$, então PD é isomorfismo para todo k em $U \cup V$.*

Prova: Seja $M = U \cup V$ e $l = n - k$. Mayer-Vietoris nos diz

$$\begin{array}{ccccccccc} H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) & \rightarrow & H^{k-1}(U \cap V) & \rightarrow & H^k(M) & \rightarrow & H^k(U) \oplus H^k(V) & \rightarrow & H^k(U \cap V) \\ \downarrow PD \oplus PD & & \downarrow PD & & \downarrow PD & & \downarrow PD \oplus PD & & \downarrow PD \\ (H_c^{l+1}(U) \oplus H_c^{l+1}(V))^* & \rightarrow & H_c^{l+1}(U \cap V)^* & \rightarrow & H_c^l(M)^* & \rightarrow & (H_c^l(U) \oplus H_c^l(V))^* & \rightarrow & H_c^l(U \cap V)^* \end{array}$$

onde todos os mapas verticais são isomorfismos, menos talvez o do meio. Mais ainda, todos os quadrados comutam a menos de sinais (exercício), e portanto trocando os sinais de alguns PD tudo comuta. O Lema segue então do *Lema dos cinco* (provar), que diz precisamente que o do meio também tem que ser isomorfismo. ■

Corolário 53. *Se M^n é compacta, conexa e orientável $\Rightarrow b_k(M^n) = b_{n-k}(M^n)$. Em particular $\chi(M^n) = 0$ se n for ímpar.*

Corolário 54. *O Teorema 24 é consequência da dualidade de Poincaré.*

§30. Homologia singular e o Teorema de deRham

Como vimos na Seção 17, temos um operador de bordo entre cadeias (de simplex) com qualquer grupo abeliano G como coeficientes, $\partial_k : C_k(M) \rightarrow C_{k-1}(M)$, que satisfaz $\partial^2 = 0$. Isto é, as cadeias formam um complexo (para qualquer espaço topológico). A homologia desse complexo é chamada de *homologia singular* de M :

$$H_k(M) = H_k(M; G) := \text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}.$$

Agora, se $M = U \cup V$, compondo cadeias com as inclusões, temos a seguinte sequência obviamente exata de Mayer-Vietoris:

$$0 \rightarrow C_k(U \cap V) \rightarrow C_k(U) \oplus C_k(V) \rightarrow C_k(U + V) \rightarrow 0,$$

onde $C_k(U + V)$ são as k -cadeias de M que se decompõem como soma de k -cadeias em U e V . Pelo Teorema 31 temos então a sequência longa correspondente em homologia. Mas, com uma idéia conceitualmente similar à que levou a construção de \mathcal{G} (“decomposição baricêntrica”) se prova com algum trabalho que

$$H_\bullet(U \cup V) \cong H_\bullet(U + V).$$

Logo, temos a sequência longa exata de homologia singular:

$$\cdots H_{k+1}(M) \rightarrow H_k(U \cap V) \rightarrow H_k(U) \oplus H_k(V) \rightarrow H_k(M) \rightarrow H_{k-1}(U \cap V) \rightarrow \cdots \quad (5)$$

Comparar com o Teorema 38 e usar o Teorema 7!

Para a homologia singular (diferenciável) com coeficientes em \mathbb{R} , $H_\bullet(M; \mathbb{R})$, pelo teorema de Stokes e de maneira análoga à Dualidade de Poincaré (Lema 52 na prova do Teorema 51), se prova o seguinte (ver Seção 28 e Seção 17):

Teorema 55 (deRham). *Para toda variedade M , a função linear $DR: H^k(M) \rightarrow (H_k(M; \mathbb{R}))^*$,*

$$DR([\omega])([c]) = \int_c \omega$$

é um isomorfismo, para todo k .

Prova: Ver [aqui](#) um argumento geral, mesmo que a variedade não seja de tipo finito. ■

Fim. :o)

References

- [Ha] Hatcher, A.: *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Hi] Hitchin, N.: *Differentiable manifolds*. Lecture notes here.
- [Hr] Hirsch, M.: *Differential topology*. Graduate text in Mathematics 33, Springer-Verlag, New York, 1972.
- [Le] Lee, J.: *Introduction to smooth manifolds*. University of Washington, Washington, 2000.
- [Tu] Tu, L: *An introduction to manifolds*. Second edition. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [Sp] Spivak, M.: *A comprehensive introduction to differential geometry..* Vol. III. Third edition. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979.
- [Zi] Zinger, A: *Notes on vector bundles..* Lecture notes here.